188

Ma.
a
49
1

188

Mathematische Uebungs-Aufgaben und deren Auflösungen zum Gebrauche für Lehrer und Lernende.

Von

Johann Andreas Schubert,
Königl. Professor, Lehrer der mathematischen Wissenschaften an der technischen Bildungs-Anstalt und an der Akademie der bildenden Künste zu Dresden, Mitgliede der ökonomischen Gesellschaft im Königreiche Sachsen und der Gesellschaft für Natur und Heilkunde zu Dresden.

Zweiter Band,
Buchstaben-Rechnung und Algebra.

Dresden und Leipzig,
in der Arnoldischen Buchhandlung.
1833.

KÖNIGL. BAYER. BIBLIOTHEK BAMBERG

Erster Theil.

Uebungs-Aufgaben

für die

Buchstaben-Rechnung und Algebra.

Vorrede.

Der vorliegende zweite Band mathematischer Uebungs-Aufgaben und deren Auflösungen umfaßt die Buchstaben-Rechnung, die Lehre von den Gleichungen, und die arithmetischen und geometrischen Progressionen. Seine Einrichtung ist der des ersten Bandes gleich; er zerfällt nämlich in zwei Theile, von denen der erste Fragen und Aufgaben für die verschiedenen Rechnungs-Abschnitte des gemeldeten Inhaltes, und der zweite die Beantwortung der Fragen und die Lösung der Aufgaben enthält.

Die Fragen eines jeden Rechnungs-Abschnittes beziehen sich auf dessen wesentlichsten Inhalt, und sollen zur Selbstprüfung der Lernenden dienen, welcher Zweck hoffentlich noch mehr durch die im zweiten Bande sich findenden Antworten erreicht wird.

Die Aufgaben sind nicht aus Werken ähnlichen Inhaltes mit dem vorliegenden zusammengetragen, sondern eigens angefertigt und deren Auflösungen mehr oder weniger, so wie es erforderlich schien, zergliedert.

Bei der Anordnung der Aufgaben wurde besonders darauf gesehen, daß schwierigere den leichtern folgen und daß durch Aufgaben folgender Abschnitte Rechnungsoperationen früherer repetirt werden.

Außer den Fragen und Aufgaben enthält der erste Theil noch eine kurzgefaßte Behandlung der quadratischen Gleichungen mit einer und mehrern unbekannten Größen, der höhern Gleichungen, der unbestimmten Gleichungen und der arithmetischen und geometrischen Progressionen.

Eine kurze Betrachtung dieser Lehren schien besonders aus dem Grunde nothwendig, weil gerade sie in den meisten Elementar-Lehrbüchern der Buchstaben-Rechnung und Algebra, wenn auch nicht ganz übergangen, doch sehr stiefmütterlich behandelt und weil, mit Ausschluß der quadratischen Gleichungen, sie sich nicht so häufig wiederholen, als die Gleichungen des ersten Grades und die Theile der Buchstaben-Rechnung.

Einigen Abschnitten des zweiten Bandes sind auch Bemerkungen beigefügt, welche die Erweiterung derselben, mit Rücksicht auf die gewöhnliche Behandlung, oder Abkürzungen der Rechnungsoperationen betreffen, und besonders denen nützlich und interessant sein dürften, die sich mehr durch eignes Studium als durch Beihülfe eines Lehrers ausbilden müssen.

Ursprünglich waren die vorliegenden Aufgaben nur für meine Schüler bestimmt, für welche sich die gewählte Einrichtung auch als vortheilhaft gezeigt, doch sind sie nun einem größern Publikum zugängig geworden, da ich den Verlag nicht selbst besorgte. Ich fürchte deshalb manchen begründeten Tadel, zumal da die Aufgaben und ihre Lösungen vor mehr als 4 Jahren angelegt, wegen Mangel an Zeit mit wenig Sorgfalt ausgeführt, und die größere Hälfte schon vor drei Jahren gedruckt: und darum manches, was ich später anders gemacht haben würde, nicht mehr zu ändern war.

Noch ist zu bemerken, daß in den Fällen, wo ein aus mehrern Faktoren bestehendes Glied eines Ausdruckes am Ende einer Zeile nicht Platz hatte, hinter den gesetzten Faktoren das Zeichen ⁝ oder :: steht, und den folgenden Faktoren in der neuen Zeile eben dieses Zeichen vorgesetzt ist.

Dresden, im August 1833.

Der Verfasser.

Inhalt-Verzeichniß.

Erster Abschnitt.

Buchstaben-Rechnung.

	Seite.
Addition	3
Subtraktion	6
Multiplikation	7
Division	10
Erhebung zu Potenzen	13
Wurzelextraktion	17
Umformungen der Wurzelgrößen	24
Addition mit Wurzelgrößen	28
Multiplikation mit Wurzelgrößen	29
Division mit Wurzelgrößen	32
Verwandlung der Wurzelgrößen in Bruchpotenzen	33
Addition und Subtraktion mit Bruchpotenzen	35
Multiplikation mit Bruchpotenzen	36
Division mit Bruchpotenzen	38
Umformung imaginärer Wurzelgrößen	40
Potenzen imaginärer Wurzelgrößen	41
Addition und Subtraktion imaginärer Wurzelgrößen	43
Multiplikation imaginärer Wurzelgrößen	44
Division imaginärer Wurzelgrößen	46
Potenzen und Wurzeln mehrgliedriger Wurzelgrößen und Bruchpotenzen	48
Zerfällung mehrgliedriger Ausdrücke in Faktoren	52
Reduktion algebraischer Brüche	55
Vom Gebrauche der Logarithmen	59

Zweiter Abschnitt.

Lehre von den Gleichungen.

Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe	71
Gleichungen des ersten Grades mit mehrern unbekannten Größen	86
Gleichungen des zweiten Grades mit einer unbekannten Größe	96

	Seite
Gleichungen des zweiten Grades mit mehrern unbekannten Größen	116
Allgemeine Eigenschaften höherer Gleichungen . . .	134
Bestimmung der Wurzeln kubischer Gleichungen . . .	177
Bestimmung der Wurzeln biquadratischer Gleichungen . .	192
Bestimmung der Wurzeln höherer Gleichungen durch Näherung	196
Unbestimmte Gleichungen	210
Exponentialgleichungen	228

Dritter Abschnitt.

Arithmetische und geometrische Progressionen.

Arithmetische Reihen der ersten Ordnung	231
Figurirte Zahlen	234
Arithmetische Reihen der ersten, zweiten u. s. f. Ordnung .	250
Geometrische Progressionen	253
Zinseszins-Rechnung	255

Einleitung.

1) Von der Buchstaben-Rechnung im Allgemeinen.

1) Was begreift man unter Buchstaben-Rechnung oder allgemeiner Größenlehre?
2) In welche Theile zerfällt die Buchstaben-Rechnung?
3) Was lehrt die Buchstaben-Rechnung im engern Sinne?
4) Was lehrt die Algebra?
5) Wodurch bezeichnet die Buchstaben-Rechnung die zu behandelnden Größen?
6) Was begreift man unter dem absoluten Werthe einer allgemeinen Größe?
7) Und was denkt man sich unter dem relativen Werthe einer allgemeinen Größe?
8) Wie drückt man das Relative allgemeiner Größen aus?
9) Welche Bedeutung hat sonach jedes der Zeichen $+$, $-$?

2) Von den allgemeinen Ausdrücken.

1) Was ist ein allgemeiner Ausdruck?
2) Was bedeuten die Ausdrücke: $3a$; $5ab$; $4\frac{1}{2}abc$?
3) Was begreift man unter den Gliedern eines allgemeinen Ausdruckes?
4) Wie theilt man die allgemeinen Ausdrücke nach der Zahl ihrer Glieder ein?
5) Wie nennt man die den Gliedern eines allgemeinen Ausdruckes vorstehenden Zahlen?

6) Wie wird ein Ausdruck, in welchem mehre gleiche Faktoren vorkommen, z. E. 3 aaab; 5 aabbb dargestellt, und wie nennt man die zu solchen Abkürzungen gebrauchten Zahlen?

7) Inwiefern unterscheidet sich der Koeffizient einer Größe von ihrem Exponenten?

8) Wie werden Ausdrücke von der Form a^3, b^5, c^8 genannt?

9) Wie heißen die den Potenzen a^3, b^5, c^8 zum Grunde liegenden Größen a, b, c?

10) Wenn heißen allgemeine Ausdrücke gleichartig oder homogen, und wenn ungleichartig oder heterogen?

11) Welches sind die homogenen Ausdrücke von:

1) $3ab^2$, $5cd^3$, $7ab^2$, $3cd^2$, $4c^2d^3$, $2cd^3$, $5ab^2$, $11cd^2$, $8c^2d^3$?

2) $3(a+b)^m$, $5(a-b)^3$, $7ab(a+2b)^r$, $5ab(a-b)^5$, $2(a-b)^3$, $6ab(a+3b)$, $4ab(a-3b)$, $(a+b)^m$, $7ab(a-b)^5$?

Erster Abschnitt.

Buchstaben-Rechnung.

I.

Die vier Spezies allgemeiner Größen.

1) Addition allgemeiner Größen.

1) Wie müssen allgemeine Ausdrücke beschaffen sein, um sie unmittelbar addiren oder vereinigen zu können?

2) Wie geschieht die Addition heterogener Ausdrücke, z. B. $+3a$, $+7b$, $-3c$, $-4d$, $+5g$?

3) Wie werden zwei homogene Ausdrücke mit gleichen Zeichen als: $+4ab$, $+7ab$ und $-3a^2b$, $-11a^2b$ addirt?

4) Wie findet man dann die Summe zweier homogener Ausdrücke, wenn ihre Vorzeichen verschieden sind, z. B. von $+8m^3n$, $-5m^3n$ und $+3ab^3c$, $-12ab^3c$?

5) Wie werden solche mehrgliedrige Ausdrücke vereinfacht oder addirt, die mehre Arten unter sich homogener Glieder mit theils gleichen, theils ungleichen Vorzeichen enthalten, z. B. $4ab - 7bc + 4fg - 3ab + 5fg + 3bc - 2fg - 5bc + 5ab$?

Aufgaben.

(a) Vorübungen zur Addition allgemeiner Größen.

1) $6 + 18 + 17 + 318$.

2) $4\frac{1}{2} + 5 + 7 + 17$.

3) $3,5 + 8\frac{1}{4} + 6\frac{2}{3}$.

4) $-5 - 8 - 3$.

5) $-8,32 - 51,67 - 873 - 2,387$.

6) $-8\frac{2}{3}-15\frac{3}{4}-7\frac{5}{8}-8\frac{11}{12}-6\frac{4}{9}$.
7) $8-5+4-7+11$.
8) $18-17-9+16-20$.
9) $4\frac{2}{3}-7{,}5+0{,}37-17{,}432+15{,}68$.
10) $7.3^2+8.3^2$.
11) $18.8^6+7.8^6$.
12) $6\frac{3}{4}.11^5+5.11^5$.
13) $13{,}23.41^6+5\frac{3}{4}.41^6$.
14) $7.5\frac{2}{3}^3+17.5\frac{2}{3}^3$.
15) $-35.7^5-26.7^5$.
16) $-3{,}754.(\frac{4}{5})^3-3.(\frac{4}{5})^3$.
17) $-7{,}321.0{,}571^6-5{,}35.0{,}571^6$.
18) $6.5^3-4.5^3$.
19) $4\frac{2}{3}(3\frac{1}{2})^6-2\frac{1}{8}(3\frac{1}{2})^6$.
20) $8(\frac{4}{7})^5-11(\frac{4}{7})^5$.
21) $3{,}72.8^6-6{,}723.8^6$.
22) $4.3^5+5.3^5+1.3^5+7.5^3$.
23) $0{,}3254.13^4+5{,}3804.13^4+0{,}587.13^4+13^4$.
24) $-3.7^3-7^3-13.7^3$.
25) $-5{,}35.12^7-6{,}847.12^7-4\frac{8}{25}.12^7-8\frac{7}{8}.12^7$.
26) $8.5^6+4.5^6-3.5^6-2.5^6$.
27) $5.7^2-4\frac{1}{2}.7^2-6\frac{1}{8}.7^2+3.7^2$.
28) $4(\frac{2}{3})^3-7(\frac{2}{3})^3-5\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^3+8(\frac{2}{3})^3$.
29) $(1\frac{1}{4})^7-6\frac{1}{8}(1\frac{1}{4})^4-14\frac{1}{8}(1\frac{1}{4})^7-2(1\frac{1}{4})^7+11\frac{1}{4}(1\frac{1}{4})^7$.
30) $4.6^7+3.6^7+4.8^5+5.8^5$.
31) $0{,}738(\frac{1}{8})^7+5{,}38(1\frac{6}{7})^8+5\frac{3}{4}(2\frac{1}{3})^5+6\frac{3}{8}(1\frac{6}{7})^8+4{,}367(\frac{1}{3})^7$
$+6\frac{7}{8}(2\frac{1}{3})^7$.
32) $-4.5^8-3.6^7-14.5^8-5.6^7$.
33) $8(\frac{1}{4})^3-(\frac{1}{4})^3-18{,}43.8^7-12{,}74.8^7$.
34) $4(\frac{1}{4})^3-5(\frac{1}{4})^3+8.6^4-7.6^4+3.6^4$.
35) $8\frac{1}{2}(2\frac{4}{5})^8-6.7^3-4.5^3+6.(2\frac{4}{5})^8-5.5^3-10(2\frac{4}{5})^8+8.7^3$.
36) $3\frac{2}{3}.8^5-4{,}384.0{,}32^6+8\frac{1}{4}.7{,}3^6-8\frac{1}{4}.8^5+3{,}72.0{,}32^6$
$-9\frac{3}{4}.7{,}3^6+10{,}873.8^5$.

(b) Addition allgemeiner Größen.

1) $a+a+a+a$.
2) $2a+3a+5a+6a$.
3) $-b-b-b-b$.
4) $-8b-7b-4b$.

5) $4a + 3b + 7a + 6b + 3a$.

6) $-8c - 6d - 4e - 7d - 4c - 8e - 3d$.

7) $3a - 2b + 8a + 4a - 6b$.

8) $4c - 6d - 5f + 6c - 3f - 8d$.

9) $2a - 7a + 5a - 6a$.

10) $8b + 4b - 6b - 3b$.

11) $8a - 3b + 2a - 2b - 4a - 7b$.

12) $3b - 2z - 4a + 8z - 6b + 6a - 7z + 3a$.

13) $a^2 + a^2 + a^2 + a^2$.

14) $3c^3 + 7c^3 + 8c^3 + 12c^3$.

15) $-7z^3 - 2x^3 - 6x^3 - 5z^3 - 8x^3$.

16) $12a^5 - 7a^5$.

17) $-15b^4 + 3b^4$.

18) $6c^4 - 7d^5 + 8c^4 - 6d^5 + 8c^4$.

19) $3\frac{1}{2}a^5 - 4h^4 - 5g^6 + 3h^4 - 4a^5 + 6g^6 - 7a^5 + 2g^6 - 7h^4$.

20) $4ab - 6ab + 8ab - 7ab$.

21) $3mn - 7fg - 2gh + 3fg - 6mn + 4gh - 2fg - 3mn$.

22) $5abc - 6ghm - 3abc + 7mnr + 4ghm - 4abc - 3mnr + 2ghm - ghm$.

23) $2a^3b^2 + 4a^3b^2 + 7a^3b^2$.

24) $8c^3d^4 + 7g^2f^2h + 2g^2f^2h + 6c^3d^4 + 2g^2f^2h$.

25) $-8m^4n - 7m^3g^2f^3 - 3m^4n - 2m^3g^2f^3 - 6m^4n$.

26) $8a^3b^2h - 4c^3d^4m^2 + 8m^5g^4 + 7c^3d^4m^2 - 7m^5g^4 - 8a^3b^2h + 3m^5g^4 - 5c^3d^4m^2$.

27) $7m^3n^2 - 2m^2n^3 + 8mn^5 + 3m^2n^3 - 5mn^5 + 8m^3n^2 - 3mn^5 + 8m^2n^3 - 3mn^5$.

28) $3a^2b - 5b^2c^3 + 8mx^4 - 4\frac{2}{3} + 8b^2c^3 - 7a^2b + 8mx^4 - 2a^2b - 7 + 4b^2c^3 + 8{,}75$.

29) $6\frac{2}{3} + 6m^5c^6 - 2\frac{2}{3}b^2c - 0{,}3gh^3 - 1{,}2m^5c^6 - 3b^2c + 4gh^3 + 11ac^5 - 4{,}7m^5c^6 - 5\frac{2}{3} - 7{,}4ac^5 - 3{,}7gh^3 - 3{,}6ac^5$.

30) $3(a-b) - 5(a-b) + 7(a-b)$.

31) $2(m+n) - 5(2a-b) - 7(m+n) + 6(2a-b) + 3(m+n)$.

32) $4(a-b) + 5(b-a) - 6(a+b) - 7(b-a) - 3(a+b) - 2\frac{3}{4}(a-b)$.

33) $4(m-2c)^2 - 7(m+3c)^4 - 4(a-3m)^4 + 2(m+2c)^3 + 4(m+3c)^4 - 3(m-2c)^2 + 5(m+3c)^4 - 6(a-3m)^4 - 3(m+2c)^4$.

34) $4a(2x-7)^3 - 3bc(4-3a)^4 + 2mn(5g-3x) + 2m(2x+7)^3 + 5bc(4-3a)^4 - 6a(2x-7)^3 - 2\frac{4}{5}mn(5g-3x) + 5m(2x+7)^3 - 2\frac{1}{2}bc(4-3a)^4$.

2) Subtraktion allgemeiner Größen.

1) Wie deutet man die Subtraktion der Buchstaben-Rechnung an, wenn z. E. $+2ab^3$ von $-7b^2c$ und $-4a^3$ von $2(m-x)^2$ und $+3ab-7cd+2a^3m$ von $+2cd-3a^3m$ abgezogen werden soll?

2) Wie entfernt man die Parenthese mit vorgesetztem Minus eines ein- oder mehrgliedrigen Ausdruckes, z. B. von:
$2(m-2)^2-(-4a^3)$; $(2c-3a^3m)-(3ab-7cd+2a^3m)$?

3) Worin besteht also die Subtraktion allgemeiner Größen, und was geschieht dann, wenn die Subtraktion ausgeführt ist?

Aufgaben.

a) Subtraktion eingliedriger Ausdrücke.

1) $x-(x)$. 2) $4a^3-(7a^3)$.
3) $2\frac{3}{4}z^2-(2\frac{1}{8}z^2)$.
4) $3(4m-1)-[3(4m-1)]$.
5) $(x-z)-(3(x-z))$.
6) $-x^4-(x^4)$. 7) $-5ab^3-(4ab^3)$.
8) $-3x^2-(-2x^2)$. 9) $-2{,}67q-(-5{,}43q)$.
10) $-4\frac{3}{8}(m-x)^2-(-6\frac{1}{4}(m-x)^2)$.
11) $3a-(-5b)$. 12) $-8(7-3z)^3-(4q^2)$.
13) $3{,}2x-(-4(3-2x)^3)$.
14) $6(2m+3n)^2-(-6(3m+2n)^3)$.
15) $-2(a-z)^4-(-5(x-z)^3)$.
16) $-(a+b)^5-(-2(a-b))$.

b) Subtraktion mehrgliedriger Ausdrücke.

1) $(4a+3b)-(3a-6b)$.
2) $(4m^2+6m^3)-(3m^2+7n^3)$.
3) $(6a+2b-3c^4)-(5a-8b-4c^4)$.
4) $(5m-3n^2-6)-(8m-7n^2+8)$.

5) $[3(x-z)-4a+6(m-n)^2]-[-2(x-z)+3\frac{3}{4}a-6{,}34(m-n)^2]$.

6) $(3m+4q^2-8z^3+3n-8)-(6r^3-2q^2+3p+5z^3)$.

7) $[5m-3(a+z)^3-4(b+x)]-[3(x-z)^2-2(a-z)^3-4(x-z)^2]$.

8) $[3a^2z-4c(c-d)^3+4mx(f-x)^2-2x-(c-d)^3]-[4a^2z$
$-3{,}5(f-x)^2-4\frac{2}{3}(d-c)^4]$.

9) $(2p-3)-(3+5p)-(4p-6)$.

10) $(3a^2+6m^3+3\frac{1}{8})-(4\frac{2}{3}a^2-2m^3+3)-(3\frac{5}{6}-2a^2+4m^3)$.

11) $-(2r+t^3)+(5x-d^2+2)-(4r+5t^3)-(8r-3t^3)$.

12) $[a+b-(6a-2f)+4(a+b)^3-(6a+2f)]-[3(a+b)^3$
$-(6a-2f)-8(a+b)^3-(11a-4f)]$.

13) $(3a+5c^3-8d)-(2x^2-8c^3+2d)-[5a-(2c^3+3d-x^2)]$.

14) $3(a+b)^2-2a^3+3x^2-5-[2(a+b)^2-5(a-b)^3$
$-(2a+3x-2)]$.

15) $(2a-x)^2-3(2b-3)^3-[3(2a-x)^2+8(2b-3)^3$
$-4(2a-x)^2]-[[8(2a-x)^2-4(2b-3)^3]-[18(2a-x)^2$
$-4(2b-3)^3]]$.

3) Multiplikation allgemeiner Größen.

1) Wie ist das Produkt von zwei positiven, und wie von zwei negativen Faktoren?

2) Wie ist das Vorzeichen des Produktes zweier Faktoren, von denen der eine positiv und der andere negativ ist?

3) Wie findet man schnell das Vorzeichen des Produktes mehrer Faktoren?

4) Wie geschieht die Multiplikation zweier oder mehrer solcher Faktoren, die nicht gleiche Basen enthalten, z. E.

$$5a^3b^2c \times 4d^3g(a-b)^3\ ?$$

5) Wie findet man das Produkt eingliedriger Faktoren, die gleiche Basen enthalten, z. B.

$$3a^2 \times 4a^3;\ 5ab^m \times -6a^p b^q;\ -3m^2n^p(a-b)^3 \times 2am^2n^p(a-b)^r.$$

6) Wie wird das Produkt von solchen eingliedrigen Ausdrücken entwickelt, von welchen der eine ein mehrgliedriger, der andere aber ein eingliedriger ist, z. B.

$$(2ab-5c^2d-3a^mb^2) \times 4a^{p+2}c^{3q}.$$

7) Wie findet man das Produkt von zwei mehrgliedrigen Faktoren, z. B. von: $(4a^3b-2ab^2c+5ab^3) \times (5m^3n-5a^2b^3)$?

8) Wie müssen die Glieder zweier Faktoren beschaffen sein, wenn Glieder des Produktes gleichnamig werden sollen?

Aufgaben.

a) Die Faktoren sind eingliedrige Ausdrücke.

1) $+m \times +n$. 2) $-m \times -n$.
3) $-m \times +n$. 4) $+m \times -n$.
5) $3bc \times 5c$. 6) $3\frac{4}{5}b \times 15m$.
7) $-2x^2 \times -3y$. 8) $-6g \times -7\frac{2}{3}h$.
9) $+5bc \times -8g^2$. 10) $-3f^2 \times 8g^3$.
11) $-7 \times 4\frac{2}{3}m^2$. 12) $+5a^3b^2 \times -6\frac{1}{5}c^3d$.
13) $3(a+x) \times 4(b+x)$.
14) $4(2m-x)^3 \times -5(3a^3-4)^2$.
15) $-8\frac{1}{3}(3-2x^2)^4 \times 1\frac{1}{5}ab^3(2m-7z)^3$.
16) $4\frac{1}{4}m^3n \times -2\frac{2}{3}c(x^2-3z)^4$.
17) $a \times a$. 18) $-a \times a$.
19) $-z \times -z$. 20) $b \times b \times b$.
21) $x \times x \times x \times -x$.
22) $y \times -y \times -y$.
23) $-c \times -c \times -c$.
24) $-d \times -d \times -d \times -d$.
25) $-m \times m \times -m \times m$.
26) $3a \times 5a$. 27) $4x \times -3x$.
28) $4z \times -6z$. 29) $-3\frac{1}{8}x \times 4x$.
30) $y^3 \times y^2$. 31) $z^4 \times z^6$.
32) $2y^3 \times 5y$. 33) $6x^2 \times -x$.
34) $-a^3 \times 4a^5$. 35) $b^p \times b^q$.
36) $-x \times x^m$. 37) $-5b \times -3,4b^m$.
38) $a^{m+1} \times a^2$. 39) $c^{3n+3} \times -3c^n$.
40) $x^{3m+n} \times -4\frac{1}{8}x^{m+2}$.
41) $3(b-x)^2 \times -4(b-x)^3$.
42) $a(b+z)^m \times b(b+z)^n$.
43) $a^2(m+n)^{p+1} \times a(m+n)^q$.
44) $-3\frac{1}{4}m^2(a-x)^{m+n} \times -m^3(a-x)^m$.
45) $4b^3(a-z)^q \times -3b^m(a-z)^{2p+3q}$.
46) $8m^3n^2 \times -2m^2n^5$.
47) $6\frac{1}{8}a^3b \times -5\frac{1}{7}b^2$.
48) $-15hg^p \times \frac{3}{5}h^{2m}g$.

49) $4ab \times 3b^2c \times 4b^3c^2$.

50) $4.7^2 \times 5.7^3 \times 2.7$.

51) $-6.5^2.4^3 \times -6^3.4.5^3 \times 3.4^2.5^4$:

52) $3a^2b(2m-1)^3 \times (3n-4)^p \times -6a^mb^3(2m-1)^r(3n-4)^q$.

53) $-5x^{2p+1}y^{2r}(m+n)^p(a-z)^q \times -\frac{4}{5}xy^{3p+5}(m+n)^q(a-z)^m$.

54) $\frac{5ab}{4} \times \frac{6c}{5}$.

55) $\frac{3gh}{5m} \times -\frac{6ac}{7d}$.

56) $-\frac{3m}{2ab} \times \frac{3mz}{x} \times -\frac{1}{5pq}$.

57) $\frac{1}{7a^3b} \times -\frac{2}{m^3b^r} \times \frac{3}{g^2h^3m^2}$.

58) $-\frac{4(a-z)^3}{3c} \times \frac{3m^3n(a-z)^r}{2c^3(x-p)^3} \times -\frac{4an^2(a-z)^q}{3bc^3(x-p)^2}$.

b) Die Faktoren sind mehrgliedrige Ausdrücke.

1) $(a+b+c) \times d$.

2) $(3a+2b-3c) \times 6f$.

3) $(6m-8mq+4rx) \times -6mqx$.

4) $(4a^mb^n+3ab^qc-6g^ph^{2r}) \times 5a^nb^3gh^p$.

5) $[3(a-b)^3-4c^2(a+x)^m] \times (a+x)^2$.

6) $[7cx(x+3)^p+4ab(g-n)^m] \times 3(x+3)^{2m}$.

7) $(a+b)(c+d)$.

8) $(x+y)(a-b)$.

9) $(3a+6m)(4n-3b)$.

10) $(6ab^3c-5abc+3d)(abc^2+d^3g^2)$.

11) $7a^mb^5c^{m+n}-4ghx^2+5cd)(5a^nb^3-6a^nc^3d+5b^p)$.

12) $[3a^2(x-n)^{2r}-5(n-1)^{r+3}+3a^2b(m-1)^{r+3}][4g(n-1)^{2p}$
$-4a^3b(x-n)^{3p}]$.

13) $(2a+3b)(3a+5b)$.

14) $(4a^3+2b^2)(5a^3+3b^2)$.

15) $(2m-6n)(2m+3n)$.

16) $(2a^2b+3b^2c)(3a^2+5b)$.

17) $(3a^2-5b)(3a^2+5b)$.

18) $(5a^3b-3c^2d-2dm^3)(5a^3b+3c^2d+2dm^3)$.

19) $(9a^2-6ab+4b^2)(9a^2+6ab-4b^2)$.

20) $(a^2-ab+b^2)(a+b)$.

21) $(16a^4 + 36a^2b^2 + 81b^4)(4a^2 - 9b^2)$.

22) $(4a^{3m}b - 5b^{2p}z^2)(2a^{3m}b + 3b^{2p}z^2)(5a^{3m}b - 7b^{2p}z^2)$.

23) $(a^{2m} - a^m b^n + b^{2n})(a^{2m} + a^m b^n + b^{2n})(a^m + b^n)(a^m - b^n)$.

24) $(a^{2p} + c^{2q})(a^{4p} + c^{4q})(c^p - c^q)(a^p + c^q)$.

25) $(3a^{3p} + 5a^{-3p})(2a^{3p} - 3a^{-3p})$.

26) $(5a^{m-3}b - 3b^{2m-3} + 6a^{3-m}c^{-3})(3b^{2m-3} + 2a^{3-m}c^{-3})$.

27) $(3x^{2p-q}(a-3z)^{m-3} - 4a^3x^{q-3}(a-3z)^{q+3})(2x^{2p-q}(a-3z)^{m-3} + 5a^3x^{q-3}(a-3z)^{q+3})$.

28) $(a^m(x-3z)^{2p-3r} - 5a^{-3p-m}(x-3z)^{2r-5p} + 5(x-3z)^{p-3r})(3a^{-3p-m}(x-3z)^{2r-5p} - 4(x-3z)^{p-3r})$.

4) Division allgemeiner Größen.

1) Welches Zeichen erhält der Quotient zweier eingliedriger Ausdrücke, wenn sie gleiche Vorzeichen haben?

2) Welches ist das Vorzeichen des Quotienten zweier eingliedriger Ausdrücke dann, wenn der Divisor positiv und der Dividend negativ, oder der Divisor negativ und der Dividend positiv ist?

3) Wie wird der Quotient von zwei solchen eingliedrigen Ausdrücken angegeben, die keine homogenen Größen enthalten, z. B. von $4a^3b : 3c^3d$?

4) Wie findet man den Quotienten von zwei eingliedrigen Ausdrücken, wenn sie homogene Basen enthalten, z. E. von $a^mb^3 : a^3b^4$?

5) Wie kann hiernach auch der Quotient aus zwei eingliedrigen Ausdrücken angegeben werden, die ungleiche Basen enthalten?

6) Wie kann man ferner allgemeine Größen aus dem Zähler eines Bruches in den Nenner, und aus dem Nenner in den Zähler bringen?

7) Es ist $\frac{a^3}{a^3} = a^0$; $\frac{a^n}{a^n} = a^0$, welches ist folglich der Werth der 0ten Potenz irgend einer Größe?

8) Wie entwickelt man den Quotienten, wenn der Divisor aus mehrern und der Dividend nur aus einem Gliede besteht?

9) Wie findet man den Quotienten, wenn Divisor und Dividend aus mehrern Gliedern bestehen?

10) Wie wird der Quotient dann näherungsweise bestimmt, wenn der Divisor ein mehrgliedriger Ausdruck, und nicht im Dividenden enthalten ist?

Aufgaben.

a) Divisor und Dividend sind eingliedrige Ausdrücke.

1) $x : y$.
2) $-x : y$.
3) $-ab : c$.
4) $ab : -c$.
5) $6abq : 3xyz$.
6) $147xz : 196pm$.
7) $-5{,}25mx : \frac{5}{4}pn$.
8) $+2(a+b)^m : -3(c-d)^p$.
9) $-3a^3b(a+n)^p : 6mg(a+1)^q$.
10) $(a-z)^{2p}(x-z)^r : 3{,}5(m-n)^q$.
11) $a^2 : a$. 12) $m^5 : -m^3$.
13) $-15m^3 : 5m$.
14) $-4\frac{1}{6}m^2b^3 : -4\frac{3}{4}mb^2$.
15) $0{,}75a^2b^4x^2 : -4x^2b^4$.
16) $a^{2m} : a^m$.
17) $-4a^{2p+3q} : 2a^{p+3q}$.
18) $6a^{5m+3n+3}b^{3m+3n}c^{2q} : -9a^{2m+3}b^{m+3n}c^q$.
19) $3(a+b)^{2m} : 6(a+b)^m$.
20) $a^2b(x-z)^{2p} : -ab(x-z)^p$.
21) $-5a^{2m}b^{q+3}(a+2)^{2m+3} : 10a^mb^3(a+2)^{2m}$.
22) $a^3 : a^5$. 23) $4x^3 : -x^7$.
24) $4x^n : -2x^{3m+n}$.
25) $2z^{3m+3} : 8z^{4m+2}$.
26) $-12a^{m+n} : 3a^{m+n}$.
27) $-21b^{3p+3}c^2 : b^{6p+4}c^3$.
28) $a^{2m+n}b^{3q+3} : ab$.
29) $xy : x^{2m}y^{3n}$.
30) $f^{3m+3}g^{4m+n} : -6f^{3+5m}g^{2m+3n}$.
31) $-3x^{2n+2}y^{3m+4} : x^{4m}y^{2m+1}$.
32) $18a^{2m+3n-1}b^{2q+3} : -6a^{3m+p}b^{3q+2}$.
33) $-2a^{2m+3}(a-z)^{2p+1} : -6a^{m+p}(a-z)^{p+3}$.

34) $x^{2m-3} : a^{q+3}$.

35) $3a^{m-r-p} c^{-m} : b^{2p-3} c^{r-3}$.

36) $4a^{2r-n} c^{p} (m-1)^{r} : 3a^{2m-3+q} c^{3-2p} (m-1)^{3r-2p+3}$.

37) $-4a^{2m-3} b^{r-4} : 5a^{p-7+3q} c^{2r-3} d^{m-4}$.

38) $1 : -3x^{2q-4} c^{m-r} f^{m-3q}$.

39) $-2 : +3a^{2n-3m-q} x^{r-3} (m+1)^{r-2p-3}$.

40) $-8 : 4c^{3q-3p-5} d^{m-3r} (2a-3)^{2p-3q-r}$.

41) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

42) $\frac{x^n}{y^n} : -\frac{c^3}{d^p}$.

43) $-3a^2x^3 : \frac{6a^{m+3}x^4}{b^2c^3f}$.

44) $\frac{36a^2cx}{7gh} : -\frac{81ax^3}{28h^2g^3}$.

45) $\frac{3a}{7bx} : \frac{1}{5by^3}$.

46) $\frac{1}{6ad} : -\frac{1}{7b^2m}$.

47) $-\frac{3a^{m-2} c^m g^{m+2}}{7b^2h^3x^r} : \frac{5a^{n+2}bg^m}{h^m x^{m-r}}$.

48) $-\frac{x^{2m} b^{2q} (a+z)^{2m-3}}{3y^{3p}(a-1)^{2r+3}} : -\frac{4x^m b^{q+1} (a+z)^{2m+n}}{9y^{2r}(a-1)^{3r-3}}$.

49) $\frac{6x^{2p} y^{4q} (a+x)^{3r+5}}{5ab^{2q+3}(m+3)^{2q-4}} : -\frac{18x^p y^{p-r} (a+x)^{3r-m}}{25b^{3-2q}(m+3)^{4-m}}$.

b) Division mehrgliedriger Ausdrücke.

1) $(ad + bd - cd) : d$.

2) $(mf - nf - fx) : -f$.

3) $(6afx + 8agx - 10ahx) : 2ax$.

4) $(abhm - cdhm + fghm) : hm$.

5) $(-12ampy + 18apqy + 42aghy + 2ay) : -6ay$.

6) $(-\frac{5}{3}a^2bgx + \frac{5}{2}ab^2gx + \frac{25}{6}abcg^2h + 3\frac{1}{3}abg) : \frac{5}{6}abg$.

7) $(12a^{m-n+1} b^{p-q} gx^{r+2} - 24a^{m-2} b^{p+1} c^3 gx^{2-r}$
$+ 30a^{m+1}b^p g^4x^{r+2} - 2a^{m+1}b^p g^4 x^{3r-3}) : 6a^{m-1}b^{3-p}gx^{r-3}$.

8) $[3a^{n+2} b^n (x+1)^2 (m-n)^3 - 9a^{m+n} b^{n+1} (m-n)^{p-3}$
$+ 12a^{n+1} b^{p-n} (m-n)^3] : 3a^n b^{n-3} (m-n)^{r-1}$.

9) $\left(\frac{15a^4}{m} - \frac{10bc^2}{m^2} - \frac{18a^2}{b^2g}\right) : \frac{15ac}{b^2m}$.

10) $\left(\frac{2a^3b^3}{c^{2q}f^{2m}m^5n} - \frac{a^3c^{2p-3q}m^3n^2}{b^{3p+4}f^{3m+3}m^4} + \frac{12\,f^{2m+1}n^6}{b^{2p+2}f^{3m}m^4}\right.$
$\left. - \frac{6a^4n^2}{b^{5p}c^{3q}f^{2m}m^4}\right) : \frac{2a^3n^2}{b^{2p}c^{3q}f^{2m}m^4}$.

11) $(abfg + cdfg + abhm + chdm) : (fg + hm)$.

12) $(6a^2b^3cx - 10abcx - 9a^2b^3fg + 15abfg) : (2cx - 3fg)$.

13) $(6a^{m+n}b^{q+1} + 9a^{2m+1}b^{p+q+1} - 10a^n b^{q-3} - 15a^{m+1}b^{p+q-3}$
$+ 14a^{n+3-2m}b^{2q} + 21a^{4-m}b^{p+2q}) : (2a^{n-m}b^q + 3ab^{p+q})$.

14) $(9m^2 + 30mn + 25n^2) : (3m + 5n)$.

15) $(12a^2m^2n^2 - 44am^2n^2p + 35m^2n^2p^2) : (2amn - 5mnp)$.

16) $(12a^2b^2(a+x)^6 - 2ab^2d(a+x)^3(m+n)^{p+2}$
$- 30b^2d^2(m+n)^{2p+4}) : (4ab(a+x)^3 + 6bd(m+n)^{p+2})$.

17) $(5\tfrac{1}{3}a^{4p}x^{2r}(a+3)^{2m-6} - 13\tfrac{1}{2}a^{2p}b^{q-3p}x^{2m-2r}(a+3)^{m-3}$
$- 24\tfrac{3}{8}b^{2q-6p}x^{4m-6r}) : 2a^{2p}x^r(a+3)^{m-3} - 7\tfrac{1}{2}b^{q-3p}x^{2m-3r}$.

18) $(9a^{4p-6}x^{2m}(a-2)^{6p-8}(m-1)^{2q-2r} - 96\tfrac{2}{49}ax^{m+1}(a-2)^p$
$- 21\tfrac{1}{3}a^{8-4p}x^2(a-2)^{8-4p}(m-1)^{2r-2q}) : (5\tfrac{1}{4}a^{2p-3}x^m(a-2)^{3p-4}$ |
| $(m-1)^{q-r} + 1\tfrac{1}{7}a^{4-2p}x(a-2)^{4-2p}(m-1)^{r-q})$.

19) $(12a^2b^2 - 13abcd + 18a^2bf - 35c^2d^2 - 19abgh + 15acdf$
$- 56cdgh + 6a^2f^2 - 5afgh - 21g^2h^2) : (3ab - 7cd + 3af - 7gh)$.

20) $(a^2 - b^2) : (a + b)$.

21) $(m^4 - 25q^2r^2) : (m^2 - 5rq)$.

22) $(a^3 - b^3) : (a^2 + ab + b^2)$.

23) $(a^3 + b^3) : (a + b)$.

24) $(a^{4m} - z^{4n}) : (a^m + z^n)$.

25) $(256a^{8p} - 6561x^{24q}) : (4a^{2p} + 9x^{6q})$.

26) $a : b - 1$.

27) $z : 2m + 1$.

28) $1 : 2x - 3$.

29) $4 : 3x^p + 5z^3$.

30) $a^3 : 5a - 3b$.

31) $4x^{-3} : x^{-2} + 4x^3$.

32) $a^{-3}b^3 : a^2b + 5b^{-2}c^3$.

II.

Erhebung zu Potenzen.

1) Was begreift man unter einer Potenz oder Dignität?
2) Was heißt also einen Ausdruck auf die 2, 3, 4, u. nte Potenz erheben?
3) Welches Vorzeichen erhält jede gerade Potenz einer positiven oder negativen Größe.
4) Wie sind alle ungeraden Potenzen positiver und wie die negativer Größen?
5) Wie findet man jede beliebige Potenz eines eingliedrigen Ausdruckes?
6) Wie erhält man die zweite Potenz eines zwei- oder mehrgliedrigen Ausdruckes?
7) Wie wird die dritte Potenz eines zweigliedrigen Ausdruckes gefunden?
8) Wie ist die dritte Potenz eines drei- oder mehrgliedrigen Ausdruckes zu bestimmen?

Aufgaben.

a) Potenzen eingliedriger Ausdrücke.

1) $(a)^2$. 2) $(a)^m$. 3) $(a^m)^2$.
4) $(a^{-1})^2$. 5) $(b^{-1})^m$. 6) $(b)^{-m}$.
7) $(b)^{-2}$. 8) $(c^n)^m$. 9) $(c^{-n})^m$.
10) $(c^{-n})^{-m}$. 11) $(g^{-3})^2$. 12) $(g^{-3})^{-2}$.
13) $((a^m)^n)^p$. 14) $((a^m)^{-n})^{-p}$.
15) $((h^2)^{-3})^{-4}$. 16) $(a^m b^{2r} c^{2q})^q$.
17) $(a^{m-3} b^{2q})^{-n}$. 18) $((a^m b^n)^p)^q$.
19) $((a^{2m} b^{-3n})^{-p})^q$. 20) $(a^{-3} c (x^{2m-3} y^2)^3)^m$.
21) $(a^{m+2} x^{2r-3})^{-2} (m^{2r-2} p^{3q-1})^{-3}$.
22) $(a^{2m-3} b^{2r-2})^3 (a^{4r+3} b^{2q-2})^m$.
23) $[(x^{4r+3n-1} z^{2q+2})^{-m} (p^{2r-2} y^{4r-3+z})^{-3}]^p$.
24) $((a+b)^{2m})^n$. 25) $((a+z)^{2m})^{-n}$.
26) $((a^{2m}+b^{3n})^{2m-3})^p$. 27) $(ab(x-z)^m)^{-3p}$.
28) $(3a^{m-3} b^2 (x+2z)^{-3x})^n$.
29) $((m+n)^{2r} (m-n)^{3p})^{-4q}$.

30) $((a+b)^{-p}(m+n))^{2p-q}$.

31) $\left(\frac{a}{b}\right)^m$. 32) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^m$.

33) $\left(\frac{b^{2m+3n-3}}{c^{2q-4p+6r}}\right)^x$. 34) $\left[\left(\frac{a^{2x-3}}{b^{2q-1}}\right)^m\right]^3$.

35) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}$. 36) $\left(\frac{a^{2m+3n-3}}{b^{2q-4r+2p}}\right)^{-x}$.

37) $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^{-1}$. 38) $\left(\left(\frac{x^{2m}}{y^{2q}}\right)^n\right)^{-2}$.

39) $\left(\left(\frac{a^m}{b^r}\right)^{-n}\right)^{-p}$.

40) $\left(\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{-m}\right)^{-n}\right)^{-p}$.

41) $\left[\frac{(x^{2r-3}y^{2q}(2a-3)^{-m})^{-p}}{z^{2q-3}(a-z)^3}\right]^{-3}$.

42) $(-a^5)^3$. 43) $(-ax^3)^3$.

44) $(-c^3dx^3q^5)^5$.

45) $(-a^{-3})^5$. 46) $(-a^{-2})^3$.

47) $(-a^{-3}b^2)^{-3}$. 48) $(-m^{-3p}n^{2q})^{-5}$.

49) $((-a^2b^{-3}cx^{-2})^{-3})^5$.

50) $((-m^2x^{-1}z^2)^{-3})^{-5}$.

51) $(-a^3)^2$. 52) $(-a^{-1}c^{-3})^2$.

53) $(-a^2b^3x^4)^4$.

54) $(-3m^{-3}b^2n^{-4q})^{-8}$.

55) $((-5c^2d^{-3}fh^{-1})^{-3})^{-4}$.

56) $(-a^m)^{2n+1}$.

57) $(-x^pz^q)^{2p}$.

58) $\left(-\frac{a^3b^{q+m}}{c^{3r-3}g^4}\right)^{2m-3}$.

b) Erhebung mehrgliedriger Ausdrücke zur zweiten Potenz.

1) $(x+y)^2$. 2) $(x-y)^2$.

3) $(x+y+z)^2$. 4) $(a+y-x)^2$.

5) $(a-x-m)^2$. 6) $(a-m+n-x)^2$.

7) $(a+b-c+d-f)^2$. 8) $(m+n-a+b-f+g-h)^2$.

9) $(x^m+y^n)^2$. 10) $(x^{m+1}+y^{2n})^2$.

11) $(m^{2r-3x-2p} + n^{4z-2p+3q-3})^2$.

12) $(3a^2 + 5b^2)^2$. 13) $(5x^{2p-3} - 6a)^2$.

14) $(6\frac{1}{4}m^{p+3} + 4x^{2r})^2$.

15) $(3a + 5b - 6c)^2$.

16) $(4a^m - 3b^n - 2x^p + 1)^2$.

17) $(mn + pq + fh)^2$.

18) $(m^3n^2p - d^{4p}x^2 - 3z^3)^2$.

19) $(3m^{2p-q-n} - 6p^{2r-3}q^{2r-8} + 4n^{2r-3})^2$.

20) $(3(a-b)^3 - 4b(a-b)^m - 3c(a-b)^n)^2$.

21) $(2a^{m+3} - 3cd^m(m-1)^{r-2} + 5a^{3-m}(m-1)^{r-2})^2$.

22) $(a^2 + ab + b^2)^2$.

23) $(3a^3 - 4a^2b + 3ab^2 - b^3)^2$.

24) $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)^2$.

Wenn man eine zweistellige Zahl des dekadischen Systems durch $a.10^1 + b.10^0$ darstellt und diesen Ausdruck auf die zweite Potenz erhebt; welche praktische Regel läßt sich hieraus für die Entwickelung der zweiten Potenz jeder zweistelligen Zahl ableiten?

Welche praktische Regel läßt sich für die Erhebung auf die zweite Potenz einer mehrstelligen Zahl ableiten, wenn jede mehrstellige Zahl des dekadischen Systems durch:

$$a10^n + b10^{n-1} + c10^{n-2} + d10^{n-3} \ldots, q.10^0.$$

darstellt?

c) Erhebung zur dritten Potenz.

1) $(a + c)^3$. 2) $(a^2 + b^3)^3$.

3) $(x^{2m} + y^3)^3$. 4) $(y^p - z^q)^3$.

5) $(b^{2m+3} - x^{2p-3})^3$.

6) $(2a^m - 3b^n)^3$.

7) $(5x^{2r+3} - 7a^{2m-3r})^3$.

8) $(7a^{m+1}x^{2n} + 3b^{m-3}c)^3$.

9) $(\frac{1}{7}c^{2p-4}d^{2q-5}f^{r-6} - 7d^{4-2q}g^{2m-4r}f^{r+6})^3$.

10) $[(m+n)^p + (a-c)^q]^3$.

11) $[a(x+z)^{2p} - (a-c)^{2p+3q-4}]^3$.

12) $[3x^{2m-n}y^{2q-4}(a-b)^{q-p} - 2x^{n-2m}y^{2-q}(a-b)^{2p-2q}]^2$.

13) $(a + b - c)^3$. 14) $(2m - 3n - 2p)^3$.

15) $(4ab - 3bc + 5cd)^3$.

16) $[3x^{2p}z^r(a-3)^p - 4cd(a-3)^{m-2p} + 3d^{m-2}(a-3)^{2p-2m}]^3$.

Wenn jede zweistellige Zahl des dekadischen Systemes durch $a10^1 + b10^0$ dargestellt wird; welche praktische Regel fließt hieraus für die Erhebung einer zweistelligen Zahl auf die dritte Potenz?

III.

Wurzelextraktion.

1) Was heißt aus einem Ausdrucke die 2, 3, 4 ꝛc. Wurzel extrahiren?
2) Weil alle geraden Potenzen positiver oder negativer Größen, positiv werden, so können folglich auch nur aus welchen Ausdrücken gerade Wurzeln gezogen werden?
3) Wie kann jede gerade Wurzel einer positiven Größe sein?
4) Wie nennt man solche Ausdrücke, wo gerade Wurzeln aus negativen Größen verlangt werden, wie z. B. $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-a^3}$, $\sqrt[6]{-a^6}$?
5) Wie ist jede ungerade Wurzel aus einer negativen und wie aus einer positiven Größe?
6) Wie findet man jede mögliche oder reelle Wurzel eines eingliedrigen Ausdruckes?
7) Wie werden solche Ausdrücke genannt, aus welchen sich eine verlangte Wurzel genau ziehen läßt, und wie solche, aus welchen sich eine verlangte Wurzel nicht genau angeben läßt; z. E. $\sqrt{9}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt[p]{a^{2p}b^{pq}}$; $\sqrt[2r]{a^3b^m}$?
8) Mit welchem Namen belegt man solche Größen, die unter einem Radikalzeichen stehen, ohne bestimmen zu wollen, ob sie rational oder irrational sind?
9) Wenn nennt man radikale Größen gleichnamig?
10) Wie bestimmt man die Quadratwurzel aus rationalen mehrgliedrigen Buchstabenausdrücken?
11) Wie aus irrationalen mehrgliedrigen Ausdrücken?
12) Wie verfährt man bei Extraktion der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen?
13) Wie findet man die Quadratwurzel aus einem Dezimalbruche?

14) Und wie aus einem echten Bruche oder einer gemischten Zahl?

15) Wie wird die Kubikwurzel aus einem rationalen mehrgliedrigen Buchstabenausdrucke gefunden?

16) Wie bestimmt man die Kubikwurzel aus einem irrationalen mehrgliedrigen Ausdrucke?

17) Wie verfährt man bei der Extraktion der Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl?

18) Wie wird die Kubikwurzel aus einem Dezimalbruche gezogen?

19) Wie ist die Kubikwurzel eines echten oder unechten Bruches zu finden?

Aufgaben.

a) Wurzelextraktion eingliedriger Ausdrücke.

1) $\sqrt{a^2}$. 2) $\sqrt{a^4}$. 3) $\sqrt[3]{a^6}$.

4) $\sqrt[4]{a^8}$. 5) $\sqrt{a^{2m}}$. 6) $\sqrt[3]{x^{6p}}$.

7) $\sqrt{a^{2m+4n}}$. 8) $\sqrt[3]{b^{9p+12q}}$. 9) $\sqrt[2]{3^4 x^{2m+4n-2}}$.

10) $\sqrt[3]{8g^{6p-3q-18r}}$. 11) $\sqrt{2^6 a^4 b^{2m}}$.

12) $\sqrt{a^{-2}}$. 13) $\sqrt[3]{a^{-12} b^{-3}}$. 14) $\sqrt[m]{c^{mn}}$.

15) $\sqrt[q]{x^{qm} z^{2pq}}$. 16) $\sqrt[r]{x^{2mr-r} p^{2r}}$.

17) $\sqrt[2p]{a^{2p} c^{6pq} b^{-2pr}}$. 18) $\sqrt[m]{(3a-r)^{2m}}$.

19) $\sqrt{a^2 b^4 (a-z)^{2n}}$.

20) $\sqrt[3]{[2^6 a^{-3} (a+x)^3 (m+n)^{6r-6} (a-2z)^{-12}]}$.

21) $\sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2}\right)}$. 22) $\sqrt[m]{\left(\frac{x^{mn}}{y^{mq}}\right)}$.

23) $\sqrt[3]{\left(\frac{64(m+n)^3}{(a-3)^{3p-6}(m+z)^{9p-3r}}\right)}$.

24) $\sqrt[c]{a^{2m} c^6 y^4}$. 25) $\frac{\sqrt[m]{a^{mn} b^{mp}}}{\sqrt[n]{b^{2n} c^{-3n}}}$.

26) $\sqrt[3]{-a^{3p} b^{-6p}}$. 27) $\sqrt[5]{-a^{r-10pq} b^{5-10m} c^{15pq-5}}$.

28) $\sqrt[2n+1]{-a^{6n+3}x^{4mn+2m}}$.   29) $\sqrt[4p-1]{-a^{8pm-2m}c^{1-4p}}$.

30) $\sqrt[2r-3]{-a^{6mr-9m}b^{6q-4rq}c^{3-2r}}$.

31) $\sqrt[-2]{x^{-2r}y^{-4p}}$.   32) $\sqrt[-3]{-\frac{1}{27}x^{3m-6p}y^{9r-3}}$.

33) $\sqrt[-2]{\left(\frac{9x^{2q-6r}z^{2m-2}}{4a^{6p-4}b^{2q-2r}}\right)}$.

34) $\sqrt[m]{\left(\frac{\sqrt[n]{a^{3pmn-2n}c^{qmn-3mn}}}{\sqrt[p]{f^{3pm}g^{3prm-2pm}}}\right)}$.

35) $\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{a^6b^{12}}}{\sqrt[3]{c^{9m-18p}d^{-9}}}\right)}$.

36) $\sqrt[-m]{\left(\frac{\sqrt[-r]{x^{2mr-3pmr}z^{-mr}}}{\sqrt[-2]{c^{2mp-4qm}d^{-6mr}}}\right)}$.

37) $\sqrt[-3]{\left(-\frac{64c^{3p-3}(a-r)^{9r+3}}{\sqrt[m]{a^{3mr}b^{3mp}(x-z)^{3m-9mr}}}\right)}$.

b) Extraktion der Quadrat-Wurzel.

α) Extraktion der Quadrat-Wurzel aus rationalen mehrgliedrigen Buchstaben-Ausdrücken.

1) $\sqrt{(m^2+2mx+x^2)}$.
2) $\sqrt{(x^2+4x+4)}$.
3) $\sqrt{(a^2-2a+1)}$.
4) $\sqrt{(a^2m^2+2abmn+b^2n^2)}$.
5) $\sqrt{(c^2f^2g^2-2bcfgmnx+b^2m^2n^2x^2)}$.
6) $\sqrt{(36x^2-60bnx+25b^2n^2)}$.
7) $\sqrt{(x^4g^6-2g^3x^2z^2q+z^4q^2)}$.
8) $\sqrt{(9g^4h^6-24cg^3h^3+16c^2g^2)}$.
9) $\sqrt{(36a^{4p-6q}b^{4m-10r}-24a+4a^{6q-4p+2}b^{10r-4m})}$.
10) $\sqrt{((m+z)^{4p+6}-8(m+z)^{2p+3}(a-r)^{2p+r-4}+16(a-r)^{2r+4p-8})}$.

11) $\sqrt{\left(\frac{m^2}{n^2}+\frac{2pm}{qn}+\frac{p^2}{q^2}\right)}$.

12) $\sqrt{\left(\frac{16a^2}{49b^4}-\frac{b}{a}+\frac{49b^6}{64a^4}\right)}$.

13) $\sqrt{\left(\frac{a^2b^2h^2(m+r)^{2r}}{16c^2(a+b)^2}-\frac{3abhp}{2c(m+r)^r}+\frac{9p^2(a+b)^2}{(m+r)^{4r}}\right)}$.

14) $\sqrt{(m^2+2mn+n^2+2pm+2pn+p^2+2mq+2nq+2pq+q^2)}$.

15) $\sqrt{(b^2-2bc+c^2+2bd-2cd+d^2+2bf-2cf+2df+f^2+2bg-2cg+2dg+2fg+g^2)}$.

16) $\sqrt{(4c^2x^2+16cmx^2+16m^2x^2-12cmnx-24m^2nx+9m^2n^2)}$.

17) $(4a^{2m}-12a^mb^n+9b^{2n}+16a^mx^q-24b^nx^q+16x^{2q})$.

18) $\sqrt{(4a^2(a^2+2ab+b^2)^{2p}-16a^3b^3(a+b)^{2p}(a-x)^{2q-3}}$
$+16a^4b^6(a^2-2ax+x^2)^{2q-3}-12\frac{4}{5}(a+b)^{3p}(a^2-2ax$
$+x^2)^{1-q}+25\frac{3}{5}a^2b^3qm^2(a+b)^p(a-x)^{-1}+10\frac{6}{25}m^4q^2::$
$::(a+b)^{2p}(a^2-2ax+x^2)^{2-2q})$.

19) $\sqrt{\left(\frac{9a^4b^2}{16c^2g^2}-\frac{a^3b^2}{3c^2p}+\frac{4a^2b^2g^2}{81c^2p^2}+2\frac{h}{a}-\frac{16g^2h}{27a^2p}\right.}$
$\left.\frac{16h^2}{9a^6b^2c^{-2}g^{-2}}-\frac{ax}{c^2g^2}+\frac{8x}{27c^2p}-\frac{16hx}{9a^4b^2}+\frac{4x^2}{9a^2b^2c^2g^2}\right)$.

20) $\sqrt{\left[\frac{(a^2+2ab+b^2)^m}{(a^2-2ab+b^2)^n}-\frac{2(a+b)^m(m+r)^q}{(a-b)^n(m+n)^r}\right.}$
$+\frac{(m^2-2mn+n^2)^{-r}}{(m+r)^{-2q}}+\frac{2(a+b)^m(c-x)^{2p-1}}{(a-z)^n(a-b)^n}$
$\left.-\frac{2(m+1)^q(c-x)^{2p+1}}{(m+n)^r(a-z)^n}+\frac{(c^2-2cx+x^2)^{2p-1}}{(a^2-2az+z^2)^n}\right]$.

21) $\sqrt{(9a^4+24a^3b-14a^2b^2-40ab^3+25b^4)}$.

22) $\sqrt{(4a^6-20a^5b+9a^4b^2+52a^3b^3-14a^2b^4-24ab^5+9b^6)}$.

β) Extraktion der Quadart-Wurzel aus irrationalen Buchstaben-Ausdrücken.

1) $\sqrt{(x^2-1)}$. 2) $\sqrt{(4a^2b^2-3)}$.

3) $\sqrt{(9m^{2p}z^4+3)}$. 4) $\sqrt{(a^2-b)}$.

5) $\sqrt{(c^{4p}+b^{4m})}$.

6) $\sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{c}{d}\right)}$. 7) $\sqrt{\left(\frac{4a^2b^4}{c^2g^4}-\frac{m^2}{n}\right)}$.

8) $\sqrt{(a^2+ab+b^2)}$ 9) $\sqrt{(a^4-a^3m+a^2m^2-am^3+m^4)}$.

γ) Extraktion der Quadrat-Wurzel aus Zahlen.

1) $\sqrt{169}$.
2) $\sqrt{289}$.
3) $\sqrt{529}$.
4) $\sqrt{2809}$.
5) $\sqrt{5041}$.
6) $\sqrt{9409}$.
7) $\sqrt{17424}$.
8) $\sqrt{29241}$.
9) $\sqrt{138384}$.
10) $\sqrt{571536}$.
11) $\sqrt{9740641}$.
12) $\sqrt{34492129}$.
13) $\sqrt{95140516}$.
14) $\sqrt{97950609}$.
15) $\sqrt{44916804}$.
16) $\sqrt{68939809}$.
17) $\sqrt{81162081}$.
18) $\sqrt{3600240004}$.
19) $\sqrt{8118550609}$.
20) $\sqrt{641445615409}$.
21) $\sqrt{16000000}$.
22) $\sqrt{28900000}$.
23) $\sqrt{10201000000}$.
24) $\sqrt{82459112490000}$.
25) $\sqrt{4,5369}$.
26) $\sqrt{76,615009}$.
27) $\sqrt{304,537401}$.
28) $\sqrt{0,64496961}$.
29) $\sqrt{0,0533656201}$.
30) $\sqrt{0,0001758276}$.
31) $\sqrt{\frac{64}{81}}$.
32) $\sqrt{\frac{289}{324}}$.
33) $\sqrt{\frac{10240000}{33443089}}$.
34) $\sqrt{157\frac{47}{121}}$.
35) $\sqrt{5}$.
36) $\sqrt{11}$.
37) $\sqrt{13}$.
38) $\sqrt{91}$.
39) $\sqrt{103}$.
40) $\sqrt{831}$.
41) $\sqrt{9890}$.
42) $\sqrt{708341}$.
43) $\sqrt{200700100}$.
44) $\sqrt{0,573}$.
45) $\sqrt{4,016}$.
46) $\sqrt{5,2323 \ldots}$
47) $\sqrt{0,765765 \ldots}$
48) $\sqrt{417,320320 \ldots}$
49) $\sqrt{\frac{7}{16}}$.
50) $\sqrt{\frac{17}{25}}$.
51) $\sqrt{4\frac{25}{49}}$.
52) $\sqrt{\frac{23}{27}}$.
53) $\sqrt{\frac{5}{8}}$.
54) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.
55) $\sqrt{\frac{12}{13}}$.
56) $\sqrt{2\frac{5}{6}}$.
57) $17\frac{11}{15}$.

c) Extraktion der Kubikwurzel.

α) Extraktion der Kubikwurzel aus rationalen Buchstaben-Ausdrücken.

1) $\sqrt[3]{(m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3)}$.

2) $\sqrt[3]{(b^3 - 3b^2 + 3b - 1)}$.

3) $\sqrt[3]{(a^3 - 3a^2z + 3az^2 - z^3)}$.

4) $\sqrt[3]{(m^3 + 9m^2n + 27mn^2 + 27n^3)}$.

5) $\sqrt[3]{(216a^3 - 216a^2x + 72ax^2 - 8x^3)}$.

6) $\sqrt[3]{(27c^{3p} - 27c^{2p}x^r + 9c^px^{2r} - x^{3r})}$.

7) $\sqrt[3]{(a^3m^3f^3 - 3a^2bcf^2gm^2 + 3ab^2c^2fg^2m - b^3c^3g^3)}$.

8) $\sqrt[3]{(343c^{6m}f^{3p} + 735b^{2q}c^{4m}f^{2p+3} + 525b^{4q}c^{2m}f^{p+6} + 125b^{6q}f^9)}$

9) $\sqrt[3]{(8a^{3m+9n-9}b^{6q} - 36a^{2m+7n-4}b^{4q+p}c + 54a^{m+5n+1}b^{2q+2p}c^2 - 27a^{3n+6}b^{3p}c^3)}$.

10) $\sqrt[3]{[(a+b)^{3m} + 3(a+b)^{2m}(a-x)^n + 3(a+b)^m(a-x)^{2n} + (a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3)^n]}$.

11) $\sqrt[3]{\left(\frac{m^3}{n^3} + 3\,\frac{m^2x}{n^2y} + 3\,\frac{mx^2}{ny^2} + \frac{x^3}{y^3}\right)}$.

12) $\sqrt[3]{\left(\frac{a^3b^6}{8c^9g^3} - \frac{3a^4b^5}{4c^7g^6} + \frac{3a^5b^4}{2c^5g^9} - \frac{a^6b^3}{c^3g^{12}}\right)}$.

13) $\sqrt[3]{\left(\frac{x^{6p-3r}z^{6r-3p}}{125m^6n^9} + \frac{9x^{4p-1}z^{3r-4p}}{25m^3} + 5\tfrac{2}{5}\,\frac{x^{2p+3r-2}n^9}{z^{5p}} + \frac{27m^3n^{18}}{x^{3-6r}z^{6p+3r}}\right)}$.

14) $\sqrt[3]{(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 + 3a^2d + 6abd + 3b^2d + 6acd + 6bcd + 3c^2d + 3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2 + d^3)}$.

15) $\sqrt[3]{(27m^3 + 108m^2n + 144mn^2 + 64n^3 + 135m^2q + 360mnq + 240n^2q + 225mq^2 + 300nq^2 + 125q^3 + 54m^2r + 144mnr + 96n^2r + 180mqr + 240nrq + 150rq^2 + 36mr^2 + 48nr^2 + 60qr^2 + 8r^3)}$

16) $\sqrt[3]{(a^9 + 3a^6b^2 + 3a^3b^4 + b^6 - 3a^6b^4 - 6a^3b^2c^4 - 3b^4c^4 + 3a^3c^8 + 3b^2c^8 - c^{12} - 3a^6d^2 - 6a^3b^2d^2 - 3b^4d^2 + 6a^3c^4d^2 + 6b^2c^4d^2 - 3c^8d^2 + 3a^3d^4 + 3b^2d^4 - 3c^4d^4 - d^6)}$.

β) Extraktion der Kubikwurzel aus unvollständigen Kuben.

1) $\sqrt[3]{(m^3 - n^3)}$. 2) $\sqrt[3]{(x^{3m} - y^p)}$.

3) $\sqrt[3]{(a^{6m} - 2b^{4p})}$. 4) $\sqrt[3]{(c^6 + 1)}$.

5) $\sqrt[3]{(a^3 + x^3)}$. 6) $\sqrt[3]{(m^3 + 3)}$.

7) $\sqrt[3]{(8x^{6p} + 6x^{3p})}$. 8) $\sqrt[3]{(64m^{3q}n^6 - 24m^{4q}n^4)}$.

γ) Extraktion der Kubikwurzel aus Zahlen.

1) $\sqrt[3]{4913}$. 2) $\sqrt[3]{39304}$. 3) $\sqrt[3]{474552}$.

4) $\sqrt[3]{357911}$. 5) $\sqrt[3]{857375}$. 6) $\sqrt[3]{10503459}$.

7) $\sqrt[3]{529475129}$. 8) $\sqrt[3]{1015075125}$.

9) $\sqrt[3]{531244194299}$. 10) $\sqrt[3]{55132330616000}$.

11) $\sqrt[3]{10,808519931}$. 12) $\sqrt[3]{13,927939416}$.

13) $\sqrt[3]{452100,671875}$. 14) $\sqrt[3]{0,009938375}$.

15) $\sqrt[3]{0,000248858189}$.

16) $\sqrt[3]{\frac{1331}{1728}}$. 17) $\sqrt[3]{\frac{30080231}{119823157}}$.

18) $\sqrt[3]{3\frac{886}{4913}}$. 19) $\sqrt[3]{7}$.

20) $\sqrt[3]{18}$. 21) $\sqrt[3]{31}$. 22) $\sqrt[3]{73}$.

23) $\sqrt[3]{79852}$. 24) $\sqrt[3]{13,675241}$.

25) $\sqrt[3]{0,000475}$ 26) $\sqrt[8]{0,00176}$.

27) $\sqrt[3]{0,4545\ldots}$ 28) $\sqrt[3]{6,432432\ldots}$

29) $\sqrt[3]{\frac{103}{125}}$. 30) $\sqrt[3]{\frac{175}{216}}$.

31) $\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$. 32) $\sqrt[3]{\frac{10}{11}}$.

33) $\sqrt[3]{4\frac{6}{7}}$. 34) $\sqrt[3]{201\frac{1}{25}}$.

35) $\sqrt[3]{37\frac{3}{4}}$. 36) $\sqrt[3]{24\frac{56}{81}}$.

IV.

Wurzel- oder Irrational-Größen.

1) Verwandlungen der Wurzel-Größen.

1) Worin bestehen die Veränderungen mit Wurzelgrößen?

2) Wie wird ein unter einem Radikalzeichen stehender Faktor vor das Radikalzeichen gebracht?

3) Wie werden vor dem Wurzelzeichen stehende Faktoren unter dasselbe gebracht?

4) Wie läßt sich ein Ausdruck von der Form: $\sqrt[mn]{a^m b^m cd}$ verwandeln?

5) Wie ist der Ausdruck: $\sqrt[p]{(a^2 b^m \sqrt[r]{cf})}$ so umzuformen, daß er nur ein Radikalzeichen erhält?

6) Was heißt Wurzelgrößen gleichnamig machen?

7) Welches ist das praktische Verfahren beim Gleichnamigmachen der Wurzelgrößen?

Aufgaben.

a) In den nachstehenden Ausdrücken sind die rationalen Faktoren vor das Radikalzeichen zu bringen.

1) $\sqrt{20}$. 2) $\sqrt{245}$. 3) $\sqrt[3]{54}$. 4) $\sqrt[3]{875}$. 5) $\sqrt{32}$.

6) $\sqrt{864}$. 7) $\sqrt[3]{81}$. 8) $\sqrt[3]{432}$. 9) $\sqrt[3]{3072}$.

10) $\sqrt[3]{14641}$.

11) $\sqrt{\frac{5}{9}}$. 12) $\sqrt{\frac{7}{18}}$. 13) $\sqrt{\frac{6}{49}}$. 14) $\sqrt[3]{\frac{7}{216}}$.

15) $\sqrt[3]{\frac{13}{729}}$.

16) $\sqrt{\frac{4}{3}}$. 17) $\sqrt{12\frac{1}{2}}$. 18) $\sqrt[3]{190\frac{1}{7}}$. 19) $\sqrt{\frac{1}{8}}$.

20) $\sqrt{\frac{1}{27}}$. 21) $\sqrt[3]{\frac{1}{256}}$. 22) $\sqrt[5]{\frac{1}{1024}}$ 23) $\sqrt[3]{\frac{1}{5000}}$.

24) $\sqrt{\frac{18}{175}}$. 25) $\sqrt{\frac{96}{539}}$. 26) $\sqrt[3]{11\frac{61}{88}}$. 27) $\sqrt[3]{5\frac{173}{375}}$.

28) $\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$. 29) $\sqrt[3]{\frac{2}{3125}}$. 30) $\sqrt[4]{\frac{7}{128}}$. 31) $\sqrt[3]{1\frac{2}{7}}$.

32) $\sqrt[3]{40\frac{1}{3}}$.

33) $\sqrt[3]{1527\frac{10}{11}}$. 34) $\sqrt[4]{7\frac{1}{9}}$. 35) $\sqrt[3]{2\frac{1}{4}}$. 36) $\sqrt[4]{5\frac{23}{64}}$.

37) $\sqrt[3]{\frac{32}{243}}$.

38) $\sqrt[3]{\frac{12}{25}}$. 39) $\sqrt[8]{\frac{16}{1029}}$. 40) $\sqrt[3]{\frac{12}{175}}$. 41) $\sqrt[4]{\frac{40}{297}}$.

42) $\sqrt[4]{\frac{250}{1029}}$.

43) $\sqrt[3]{\frac{416}{2643}}$. 44) $\sqrt[3]{\frac{2376}{319333}}$.

45) $\sqrt{a^2b^2c}$. 46) $\sqrt[3]{a^6b^3d}$. 47) $\sqrt{a^3b^5g}$.

48) $\sqrt[3]{x^4y^5z^2}$. 49) $\sqrt{a^{2p+q}m^{2y-3}}$.

50) $\sqrt{x^{4q-3p}y^{3m-5p}z^{4r-8}}$.

51) $\sqrt[3]{27c^{4m\;3}d^{2q-5p-3}f^{4r-2}}$.

52) $\sqrt{a^{2m+2}a^{3n-1}y^{5p-q}}$.

53) $\sqrt[3]{x^{4p-5r-2}z^{3p-q+5r}}$.

54) $\sqrt[m]{a^mb^{mn}c}$. 55) $\sqrt[p]{x^{2p+3}z^{pq-pr}}$.

56) $\sqrt[mr]{a^{2pmr-2}x^{3mr}z}$. 57) $\sqrt[m-1]{3a^{2m-4}b^{2m-3+p}z^{2m-1}}$.

58) $\sqrt[2p+q]{m^{4p+q+3}n^{p+3q-3}p^{3p+2q}}$.

59) $\sqrt[r-3]{4x^{3r+m-3}y^{4r-3p+7}z^{p+r+4}}$.

60) $\sqrt[m-2]{a^{mr-r-3}c^{2m-2p-3}}$.

61) $\sqrt{a^3b(x-1)^2}$.

62) $\sqrt{x^5y^4(m+n)^{3p}}$. 63) $\sqrt[3]{8m^7n^4x^3(a-z)^{5q}}$.

64) $\sqrt{12c^{2m}x(m-3)^2(a-b)^{3q}}$.

65) $\sqrt[3]{16g^{5p}h^{4q}(m-a)^{5p-3}(a-z)^{4r-4}}$.

Wenn die Potenz einer Basis die Hälfte des Wurzelexponenten übersteigt, ist dieselbe rational zu machen. Beispiele von 28 bis Ende.

66) $\sqrt[m]{a^{2m-1}b^{pm+3}(a-b)^{2m}}$.

67) $\sqrt[p+1]{x^{2p+3}y^{2p+q-2}(a-1)^{3p+4}(x-z)^{2p+q-3}}$.

68) $\sqrt[2p-3]{x^{3q}(a-1)^{4p-5}(m-1)^{p+3}(a+3)^{2p+q+1}}$.

b) Die vor dem Wurzelzeichen stehenden Faktoren sind unter das Wurzelzeichen zu bringen.

1) $2\sqrt{3}$. 2) $5\sqrt{7}$. 3) $4\sqrt[3]{5}$.

4) $11\sqrt[3]{11}$. 5) $7\sqrt[4]{3}$. 6) $13\sqrt[4]{7}$.

7) $\frac{3}{4}\sqrt{12}$. 8) $\frac{7}{8}\sqrt[3]{16}$.

9) $3\sqrt{\frac{4}{5}}$. 10) $6\sqrt[3]{\frac{1}{12}}$.

11) $\frac{4}{5}\sqrt{\frac{3}{7}}$. 12) $1\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$.

13) $a\sqrt{b}$. 14) $a^m b\sqrt{c}$.

15) $2a^3b\sqrt{c}$. 16) $\frac{ab}{cg}\sqrt{\left(\frac{ab}{cg}\right)}$.

17) $\frac{2mx}{hg}\sqrt[3]{\left(\frac{3mx^2}{hg}\right)}$. 18) $\frac{x^2z^m}{pq}\sqrt[m]{xz^3}$.

19) $\frac{m}{n}\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)}$. 20) $\frac{m^2}{n^3}\sqrt[3]{\left(\frac{n}{m}\right)}$.

21) $(x-1)\sqrt{(m+n)}$. 22) $(m+n)\sqrt[3]{(m-n)}$.

23) $bx^3\sqrt[m]{z^2}$. 24) $g^m x^{n-3}\sqrt[p]{a}$.

25) $x^p y^q\sqrt[r-2]{f^m g^2}$. 26) $a\sqrt[m]{a}$.

27) $(a-x)^r\sqrt[p]{a(a-x)^m}$. 28) $a\sqrt[p+2]{(a+b)}$.

29) $(a+x)\sqrt[2p+r]{c^p}$. 30) $a^n b(2x-1)^r\sqrt[2p-3]{b^{p+3}c(2x-1)^{4r-2pr}}$.

31) $\sqrt{(a\sqrt{b})}$. 32) $\sqrt[3]{(a^2b\sqrt{c})}$.

33) $\sqrt[m]{(a\sqrt[n]{b})}$. 34) $\sqrt[2p+3]{(c^m\sqrt[q]{f^3})}$.

35) $\sqrt{(a^{2p-3}c\sqrt[p]{ac^3})}$.

36) $\sqrt[3]{(ab(m-3)^{2r-3}\sqrt{a^{m-3}b^2(m-3)^{m-r}}}$.

c) Die unter dem Radikalzeichen stehenden Größen von der Form $\sqrt[pq]{a^pb^pc^r}$, sind auf die Form: $\sqrt[q]{(ab\sqrt[p]{c^r})}$ zu bringen.

1) $\sqrt[6]{a^2b^2c}$. 2) $\sqrt[6]{a^3m^3c}$. 3) $\sqrt[6]{a^{4p}x^{2r}mq}$.

4) $\sqrt[9]{m^{3q}n^{3p+3r}gh}$. 5) $\sqrt[mn]{a^{3n}b^{2n}g}$.

6) $\sqrt[pr]{c^{qr}x^{rr+r}mn^2}$. 7) $\sqrt[3q]{m^{3r}n^{3p}b^{-q}ag}$.

8) $\sqrt[2p]{a^{2r+2}c^{4m+2}d^4g^qc}$. 9) $\sqrt[2q+2]{a^{6r}b^{2p}m^2x^mp^q}$.

10) $\sqrt[4p+6]{x^{6p}z^{2r}y^6ab^mc^p}$. 11) $\sqrt[6]{\left(\frac{a^2x^2h}{cm}\right)}$.

12) $\sqrt[2m]{\left(\frac{a^2c^6px}{mq}\right)}$. 13) $\sqrt[mn]{\left(\frac{a^nx}{b^nz}\right)}$.

14) $\sqrt[pr]{\left(\frac{ax^r}{mz^r}\right)}$. 15) $\sqrt[6]{\left(\frac{a^2m^2xy}{b^2n^2pq}\right)}$.

d) Die nachstehenden Wurzelgrößen sind gleichnamig zu machen.

1) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$. 2) $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{c}$.

3) $\sqrt[m+r]{am}$, $\sqrt[p+3]{cxy}$. 4) $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{5}$.

5) $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)}$, $\sqrt[p]{\left(\frac{c}{x}\right)}$. 6) $\sqrt[q+x]{\left(\frac{x}{z}\right)}$, $\sqrt[mn]{\left(\frac{h}{p}\right)}$.

7) $\sqrt[p+p]{\left(\frac{(m-1)^r}{3c}\right)}$, $\sqrt[m-1]{\left(\frac{c}{(x-1)^p}\right)}$. 8) $\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$, $\sqrt{\frac{7}{11}}$.

9) $\sqrt{(a+b)}$, $\sqrt[3]{(b-1)}$. 10) $\sqrt[3]{3a(c-x)}$, $\sqrt{(3m-4)}$.

11) $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{b}$. 12) $\sqrt[6]{x}$, $\sqrt{h}$.

13) $\sqrt[mn]{c}$, $\sqrt[mp]{x}$. 14) $\sqrt[xr]{a^{2p}}$, $\sqrt[rz]{m^p}$, $\sqrt[pr]{3a^m}$.

15) $\sqrt[2mq]{a^{r-1}z}$, $\sqrt[3nq]{x^pz^{r-2}}$, $\sqrt[5pq]{m^px^{p+m}}$.

16) $\sqrt[mr+r]{a^3}$, $\sqrt[nr+r]{b^2}$, $\sqrt[pr+r]{c^m}$.

17) $\sqrt[6m-3]{a^2b(x-1)^n}$, $\sqrt[9p-12]{a^mb^{q+3}}$, $\sqrt[15x-9]{c^{3r+m}(m-1)^p}$.

18) $\sqrt[mm-pm]{x^r}$, $\sqrt[mn-pn]{z^{2p}}$, $\sqrt[pm-pp]{y^q}$,

19) $\sqrt[2r-6]{3a(m-1)^r}$, $\sqrt[3r-9]{2m^r(x-1)^{p+r}}$, $\sqrt[5r-15]{a^{2p-3}c^{m-2}}$.

20) $\sqrt[(m-1)(p+1)]{a^2x^m}$, $\sqrt[(p+m)(p+1)]{b^2c^{r-1}}$, $\sqrt[3(p+1)]{4m^p(x-a)^m}$.

21) $\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)}$, $\sqrt[n]{\left(\frac{c}{g}\right)}$, $\sqrt[p]{\left(\frac{h}{m}\right)}$.

22) $\sqrt[6]{\left(\frac{a^2b}{c}\right)}$, $\sqrt[4]{\left(\frac{a^3b^{2m}}{a^{3p}}\right)}$, $\sqrt[3]{\left(\frac{ab^3(m-1)^m}{c(p+r)^{n-1}}\right)}$.

2. Die Spezies der Wurzelgrößen.

α) Addition mit Wurzelgrößen.

1) Wenn können Wurzelgrößen addirt werden?
2) Wie geschieht die Addition homogener Wurzelgrößen?
3) Welchen Ausdruck geben die Glieder: $3\sqrt{a} - 7\sqrt{b} + ac\sqrt{a} - 4bc\sqrt{b}$ nach der Addition?
4) Was muß man bei gleichnamigen Wurzelgrößen oft thun, damit sie gleichartig werden? z. B. in: $\sqrt{\frac{2}{3}} - 5\sqrt{6} + 2\sqrt{24}$; $b^2\sqrt[3]{a^2b} + 3a^2\sqrt[3]{a^{-1}bc^3} - 7\sqrt[3]{a^{-1}b^4c^3} + 3ab^2c^2\sqrt[3]{a^2b^4}$?

Aufgaben.

1) $(2\sqrt{3} + 5\sqrt{3})$.
2) $(7\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{4})$.
3) $(10\sqrt[4]{5} - 6\sqrt[4]{5})$.
4) $(4\tfrac{1}{3}\sqrt{6} - 2\tfrac{1}{2}\sqrt{6})$.
5) $(4\tfrac{3}{8}\sqrt[3]{11} - 5\tfrac{1}{12}\sqrt[3]{11})$.
6) $(\sqrt{7} - \tfrac{1}{3}\sqrt{7})$.
7) $(\tfrac{4}{5}\sqrt[3]{13} - \tfrac{11}{15}\sqrt[3]{13})$.
8) $(4\sqrt[4]{6} - 7\sqrt[4]{6})$.
9) $(a\sqrt[m]{x} + b\sqrt[m]{x})$.
10) $(3c\sqrt[p]{ac} - 3\sqrt[p]{ac})$.
11) $(2am\sqrt{a} - 3gh\sqrt{a})$.
12) $(4\sqrt[r]{m} - c\sqrt[r]{m})$.
13) $(x\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a})$.
14) $[(a + 2b)\sqrt{c} - 5m\sqrt{c}]$.
15) $[(3a - 4c)\sqrt{am} - (2m + 4a)\sqrt{am}]$.
16) $[(2am^3 - 2ac)\sqrt[3]{ax^r} + (3am^3 + 7ac)\sqrt[3]{ax^r}]$.
17) $(3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5})$.

18) $(\sqrt[3]{7} - c\sqrt[3]{7} + 4\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{7})$.
19) $(a\sqrt{c} - b\sqrt{c} - d\sqrt{c} + f\sqrt{c})$.
20) $(4g\sqrt[m]{x} - 2h\sqrt[m]{x} + m\sqrt[n]{c} + g\sqrt[n]{c})$.
21) $(3m\sqrt[3]{f} + 2g\sqrt[3]{f} + 4h\sqrt[3]{f} + 2x\sqrt{m} - 3g\sqrt{m})$.
22) $(h^2g\sqrt{m} - g^2m\sqrt{m} + abg\sqrt[p]{x} - abh\sqrt[p]{x})$.
23) $(a^2\sqrt[3]{gh} - b^2\sqrt[3]{gh} - 3a^2bm\sqrt[m]{bc} + 6am^2b\sqrt[m]{bc} + 2a^3b^2 ::$
$:: \sqrt{mn})$.
24) $(\sqrt{75} + \sqrt{12} + \sqrt{147})$.
25) $(\sqrt[3]{686} - 2\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{203\frac{7}{27}} + \sqrt[3]{12\frac{35}{108}})$.
26) $(\sqrt{4mx^2} - \sqrt{16c^2m} + \sqrt{9d^2m})$.
27) $(\sqrt[3]{125a^3x^3n} - 5\sqrt[5]{27b^3x^3n} + 5c\sqrt[3]{8x^3n})$.
28) $(5a\sqrt[3]{8a^4x^7} + cm\sqrt[3]{8a^4x^4} - cm\sqrt[3]{216ac^3m^3x})$.
29) $(\sqrt{50} - 2\sqrt{8} + \sqrt[3]{448} - \sqrt[3]{56})$.
30) $(\sqrt{5\frac{1}{3}} - \sqrt{12} + \sqrt{3} - \sqrt{147} + \sqrt{48})$.
31) $(\sqrt[3]{6\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{\frac{5}{6}} + \sqrt{15\frac{5}{8}} - \sqrt{7\frac{7}{125}})$.
32) $(\sqrt{(a^2c\sqrt{m})} - \sqrt{(b\sqrt{b^2c^2m})} - \sqrt{(c^2\sqrt{c^2m})})$.
33) $(m\sqrt[p]{(m^p\sqrt{m^2n})} - m\sqrt[p]{(m\sqrt{}^{2p+1}+)}n\sqrt[p]{(mn^p\sqrt{n})})$.
34) $\left(\sqrt{\frac{a^2b^2m}{c^2}} - c\sqrt{\frac{m^3}{b^2}} + x\sqrt{\frac{g^2m}{a^2}}\right)$.
35) $\left(\frac{2}{m}\sqrt[3]{a^4x^4} - \frac{4c}{3}\sqrt[3]{\frac{x^{9p-8}}{m^6}} + \frac{1}{4bc}\sqrt[3]{\frac{a^{3p+3m-8}c^6x}{m^3}}\right)$.
36) $\left(\sqrt{\frac{a^3b^3}{c^3f^3}} - m\sqrt{\frac{a^3b}{g^2h^2fc}} + \frac{1}{g}\sqrt{\frac{b^3f}{ac}}\right)$.

b) Multiplikation mit Wurzel-Größen.

1) Wenn können Wurzelgrößen multiplizirt werden?
2) Was muß man dann thun, wenn Wurzel-Faktoren nicht gleichnamig sind, wenn sie wirklich multiplizirt werden sollen z. E. in $4a^2\sqrt[m]{a} + 3b^2c\sqrt[n]{c}$?
3) Weil $\sqrt{a^m} + \sqrt{a^m} = \sqrt{a^{2m}} = a^m$; $\sqrt{(a+b-x)} \times \sqrt{(a+b-x)} = \sqrt{(a+b-x)^2} = (a+b-x)$ giebt; was folgt hier-

aus für jede ein- oder mehrgliedrige Quadratwurzel-Größe, wenn sie mit sich selbst multiplizirt wird?

Aufgaben.

1) $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$. 2) $\sqrt[3]{m} \times \sqrt[5]{n}$. 3) $\sqrt{a^m} \times \sqrt{a^{m+1} b}$.

4) $\sqrt[p]{a^{pq+3}x} \times -\sqrt[p]{a^m x^{p-pq}}$. 5) $-\sqrt[m]{\frac{a}{b}} \times -\sqrt[n]{\frac{c}{e}}$.

6) $-\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} \times \sqrt[3]{\frac{ac^{2m}}{b^{2m+2}d}}$. 7) $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$ 8) $\sqrt{abc} \times \sqrt{abc}$.

9) $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$. 10) $\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{11}$. 11) $\sqrt{6} \times \sqrt{3}$.

12) $\sqrt{10} \times \sqrt{5}$. 13) $\sqrt[3]{20} \times \sqrt[3]{10}$. 14) $\sqrt[3]{\frac{4}{5}} \times \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

15) $-\sqrt[3]{\frac{5}{7}} \times \sqrt[3]{12\frac{1}{2}}$. 16) $\sqrt{7} \times \sqrt{7}$. 17) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{36}$.

18) $\sqrt{7} \times -\sqrt{14}$. 19) $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$.

20) $3ac\sqrt[3]{bg} \times -5ch\sqrt[2]{cm}$. 21) $(a+b)\sqrt[m]{x} \times (a-b\sqrt[m]{y}$.

22) $2\sqrt{5} \times 4\sqrt{7}$. 23) $7\sqrt[3]{\frac{4}{5}} \times -8\sqrt[3]{\frac{15}{16}}$.

24) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{mx}$. 25) $\sqrt[m]{a^2nx} \times \sqrt[m]{a^r pq} \times -\sqrt[m]{3a^4}$.

26) $a\sqrt{b} \times -c\sqrt{d} \times -ab\sqrt{mn}$.

27) $3x\sqrt[3]{5c} \times -4hg\sqrt[3]{m} \times 3g^2r\sqrt[3]{(a+b)}$.

28) $\sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{2}$. 29) $\sqrt[3]{4} \times -\sqrt[3]{12} \times -\sqrt[3]{18}$.

30) $3\sqrt{\frac{2}{3}} \times -5\sqrt{\frac{4}{5}} \times 6\sqrt{2\frac{2}{3}}$.

31) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{b}$. 32) $\sqrt{ab^2} \times \sqrt[3]{ab}$.

33) $3\sqrt[m]{a} \times 4\sqrt[n]{cx^m}$. 34) $3ab\sqrt[p]{c^q x^r} \times -5m\sqrt[q]{c^p x^p}$.

35) $2ax\sqrt[p]{c} \times -5gh\sqrt[q]{m} \times -3(a-b)\sqrt[r]{n}$.

36) $3a\sqrt[m-3]{ax} \times -b\sqrt[p-3]{am}$. 37) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{6}$.

38) $2\sqrt[3]{5} \times -4\sqrt{15}$. 39) $2\frac{2}{3}\sqrt{3} \times 5\sqrt[3]{6} \times -3\sqrt{15}$.

40) $2c\sqrt[m-1]{ab} \times -\sqrt[p+1]{fg} \times -3g\sqrt[m+1]{mn}$.

41) $\sqrt[m]{5} \times \sqrt[n]{6}$. 42) $\sqrt{(a+b)} \times \sqrt[3]{(m+n)}$.

43) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[mn]{b}$. 44) $3m\sqrt[pq]{ax} \times 4c\sqrt[q]{cx}$.

45) $\sqrt{5}\times\sqrt[4]{6}$. 46) $\sqrt[6]{(a+b)}\times\sqrt[4]{(c-x)}$.

47) $mx\sqrt[2m]{(2x-1)}\times-pn\sqrt[3m]{(2x-1)}$.

48) $a\sqrt[3m]{x}\times-\sqrt[3n]{ax}\times-3a^2b\sqrt[3p]{(a-b)^{2r-r}}$.

49) $(\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}-\sqrt[m]{c})\times\sqrt[m]{x}$.

50) $(2\sqrt[p]{an}-3n\sqrt[p]{cx}-\frac{4}{5}mn\sqrt[p]{gx})\times-\sqrt[p]{mnx}$.

51) $(\sqrt[r]{m}-3\sqrt[r]{n}-5\sqrt[r]{q})\times3\sqrt[r]{\frac{m}{n}}$.

52) $(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{2})\times\sqrt{2}$.

53) $(\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{6}+2\sqrt[3]{18})\times\sqrt[3]{12}$.

54) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{d})$.

55) $(a\sqrt[p]{m}-3x\sqrt[p]{n}-4)(\sqrt[p]{x}-2a\sqrt[p]{pq})$.

56) $(2\sqrt{a}-\sqrt{b})(3\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

57) $(3ac\sqrt{am}+5cx\sqrt{mx})(2ax\sqrt{am}-4cx\sqrt{mx})$.

58) $(m\sqrt[p]{x}-4c\sqrt[p]{z})(n\sqrt[p]{x}+3m\sqrt[p]{z})$.

59) $(3\sqrt{5}+4\sqrt{6})(5\sqrt{5}+3\sqrt{6})$.

60) $(6\sqrt{14}+7\sqrt{6})(5\sqrt{14}+8\sqrt{6})$.

61) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

62) $(3\sqrt{m}-4\sqrt{n})(3\sqrt{m}-4\sqrt{n})$.

63) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})$.

64) $(\sqrt{mz}-\sqrt{c}+\sqrt{m})(\sqrt{mz}-\sqrt{c}-\sqrt{m})$.

65) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}(\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{7})$.

66) $(\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{7})$.

67) $(2\sqrt{xz}-3m\sqrt{ax})(2\sqrt{xz}+3m\sqrt{ax})$.

68) $(\sqrt{a}-4\sqrt{b}+\sqrt{d})(\sqrt{a}+2\sqrt{b})$.

69) $(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{b}+\sqrt[p]{c})\times(\sqrt[q]{x}-\sqrt[r]{z})$.

70) $(\sqrt[m]{x}-\sqrt[n]{z}+3\sqrt[p]{y})(\sqrt[z]{m}-2\sqrt[r]{n})$.

71) $(\sqrt[3]{a^2b}+3a\sqrt[m]{ah}-z)\times(4\sqrt[qr]{mz}-3\sqrt{mx^r})$.

72) $(\sqrt[mmn]{a}+\sqrt[mnn]{c}-\sqrt[mnp]{f})\times(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{b})$.

73) $(\sqrt[2m]{mn}-\sqrt[2n]{pq}+\sqrt[2p]{c})(\sqrt[2x]{h}-\sqrt[2z]{g})$.

c) Division mit Wurzelgrößen.

1) Wie müssen die zur Division gegebenen Wurzelgrößen beschaffen sein, um die Division ausführen zu können?

2) Wie kann dann die Division ausgeführt werden, wenn die Wurzelgrößen des Divisors und Dividents nicht gleichnamig sind?

Aufgaben.

1) $\sqrt{a} : \sqrt{b}$. 2) $\sqrt[3]{ax} : \sqrt[3]{bx}$.

3) $\sqrt[m]{a^{p-3}c} : \sqrt[m]{a^{q-p}c^{r}}$. 4) $\sqrt[2m]{a^{3p+3}x^{4q-2p}} : \sqrt[2m]{a^{2p+3}x^{q}}$.

5) $12c^{p+1}x^{p+1}\sqrt[5]{m^{2p+1}x^{q+1}} : 4cx^{p}\sqrt[3]{c^{2p}m^{2p}x^{q}}$.

6) $\frac{m^2g}{2c^2x}\sqrt[2p]{\left(\frac{4a^2c}{3m^2}\right)} : \frac{3gm}{4cx^2}\sqrt[2p]{\left(\frac{ah}{cm}\right)}$.

7) $\sqrt[3]{18} : \sqrt[3]{2}$. 8) $\sqrt[3]{15} : \sqrt[3]{3}$.

9) $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} : \sqrt[3]{1\frac{5}{8}}$. 10) $106\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{5}} : 6\frac{2}{5}\sqrt[3]{15}$.

11) $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b}$. 12) $\sqrt[p+q]{h^{q}m^{p}n} : \frac{3hm}{2nx}\sqrt[r-4]{m^{r}n^{q}}$.

13) $\sqrt{a} : \sqrt[3]{b}$. 14) $\frac{4}{7}\sqrt[3]{\left(\frac{a}{m}\right)} : 4\sqrt{\left(\frac{c}{x}\right)}$.

15) $\sqrt{(a+b)} : \sqrt[3]{(a+b)}$. 16) $\sqrt{3} : \sqrt[4]{6}$.

17) $\sqrt[3m]{4} : \sqrt[6m]{12}$. 18) $\sqrt[2p]{2cx} : \sqrt[6p]{8x^2z}$.

19) $\sqrt[pm+qm]{a^{r}c^{p}(m-1)^{n}} : \sqrt[p+q]{c(m-1)}$.

20) $\sqrt[2x-2p]{(n-1)} : \sqrt[3x-3p]{(n-1)}$. 21) $(\sqrt[p]{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}) : \sqrt{f}$.

22) $(2\sqrt{x}-4g\sqrt{2m}-3x^2\sqrt{mx}) : 6m\sqrt{c}$

23) $(210\sqrt{5}-490\sqrt{3}+1890\sqrt{2}) : 7\sqrt{30}$.

24) $(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{x}+3\sqrt[p]{qr}) : \sqrt[r]{p}$.

25) $(\sqrt[m]{ax}-3c\sqrt[mn]{cg}-4h\sqrt[pn]{np}) : \sqrt[n]{hx}$

26) $(\sqrt{ad}+\sqrt{af}+\sqrt{bd}+\sqrt{bf}+\sqrt{cd}+\sqrt{cf}) : (\sqrt{d}+\sqrt{f})$.

27) $(21\sqrt{am}-28m\sqrt{n}-14\sqrt{cmx}-9\sqrt{ax}+12\sqrt{mnx}+6x\sqrt{c}) : (3\sqrt{a}-4\sqrt{mn}-2\sqrt{cx})$.

28) $(3\sqrt[3p]{a^p c^3 n^3 x^p} - 4\sqrt[3n]{a^{n+3} x^{n+3}} - 15\sqrt[2p]{c^{p+2} n^2 x^p} +$
$20\sqrt[2n]{a^2 c^n x^{n+2}} - 3\sqrt[pm]{a^{pp} c^m n^{m+p}} + 4\sqrt[mn]{a^{pn+mn} n^n x^m}) :$
$: (3\sqrt[p]{cn} - 4\sqrt[n]{ax})$.

29) $(3\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[6]{a^2 b^3} - 14b + 15\sqrt[3]{ax} + 35\sqrt[6]{b^3 x^2}) :$
$: (3\sqrt[3]{a} + 7\sqrt{b})$.

30) $(\sqrt[r-1]{c^2 x^2} - 25\sqrt[m+1]{m^2 x^2}) : (\sqrt[r-1]{cx} + 5\sqrt[m+1]{mx})$.

V.

Bruchpotenzen.

1) Verwandlung der Wurzelgrößen in Bruchpotenzen.

1) Was ist eine Bruchpotenz?

2) Wie kann man sich eine Bruchpotenz entstanden denken, und als was ist folglich jede Bruchpotenz zu betrachten?

3) Wie geschieht die Verwandlung jedes eingliedrigen Wurzelausdruckes in eine Bruchpotenz?

4) Was hat man bei der Verwandlung einer Wurzelgröße in eine Bruchpotenz zu bemerken, wenn der unter dem Radikalzeichen stehende Ausdruck negativ ist?

5) Wie ist eine Wurzelgröße von der Form $\sqrt[-m]{a^n}$, oder $\sqrt[-p]{\frac{a}{b}}$ so umzuändern, daß der negative Wurzelexponent positiv wird?

6) Wie wird eine Bruchpotenz in eine Wurzelgröße verwandelt?

7) Wie sind die Bruchpotenzen $-a^{\frac{m}{n}}$; $+a^{\frac{m}{n}}$; $(-a)^{\frac{p}{q}}$; $-(-a)^{\frac{p}{q}}$; $-(-a)^{-\frac{p}{q}}$ als Wurzelgrößen darzustellen?

Aufgaben.

a) Die nachstehenden Wurzelgrößen sind als Bruchpotenzen darzustellen.

1) $\sqrt[p]{a^m}$. 2) $\sqrt[r]{x^m}$. 3) $\sqrt[pr]{a}$. 4) $\sqrt[3]{-ax^pz^r}$.

5) $\sqrt[m+p]{a^{2p}x^{r-3}}$. 6) $\sqrt[m]{\frac{a^n}{b^n}}$. 7) $\sqrt[p+3]{\left(\frac{cx^{r-1}}{m(x-1)^r}\right)}$. 8) $\sqrt[m]{\left(\frac{1}{c^p}\right)}$.

9) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a^2c^{m-2f}}\right)}$. 10) $\frac{1}{\sqrt[2m]{a^rb^q}}$. 11) $\sqrt[p]{a^{-3}}$. 12) $\sqrt[m-2]{c^{-r}x^{-n}}$.

13) $\frac{mx}{\sqrt[2p-3]{-a^{r-1}c}}$. 14) $\frac{2n}{\sqrt[x-3r]{5x^p(m-x)^{r-1}}}$. 15) $\sqrt[-n]{a^r}$.

16) $\sqrt[-3]{\left(\frac{a^{2m}b^{q-1}}{3f^px^n}\right)}$. 17) $\frac{ab}{\sqrt[-3]{a^mx^n}}$. 18) $\sqrt[-3p-2]{\left(\frac{a^mx^n}{ch}\right)}$.

19) $\sqrt[-m]{a^{-p}}$. 20) $\sqrt[-2r-3]{x^{-(m+3)}}$. 21) $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b^p}$.

22) $\sqrt[pq]{a^{2r-3}} \cdot \sqrt[3r]{\left(\frac{a^m}{b^n}\right)}$. 23) $\sqrt[m-3]{\left(\frac{3}{2a^xz^p}\right)} \cdot \frac{ax}{\sqrt[m-2]{a^3x^r}}$.

24) $\frac{\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[p]{b^r}}{\sqrt[r]{c^2} \cdot \sqrt[m]{a^{p-3}}}$. 25) $\sqrt[m]{\left(a\sqrt[n]{b}\right)}$. 26) $\sqrt[r-1]{\left(x^2\sqrt[p]{c}\right)}$.

27) $\sqrt[p]{\left\{\frac{\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[n]{c^r}}{\sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[p]{g^r}}\right\}}$. 28) $\sqrt{\left\{\frac{a\sqrt[m]{x}}{m\sqrt[n]{p}}\right\}}$.

29) $\sqrt[m]{\left\{\frac{a^p\sqrt[r]{\left(c^n\sqrt[p]{fm}\right)}}{c\sqrt[p]{\left(a^2\sqrt[m]{b^2}\right)}}\right\}}$. 30) $\sqrt[m-1]{\left\{\frac{a^{m-p}\sqrt[p]{\left(c^2\sqrt[m-r]{b^{2p}}\right)}}{\sqrt{\left(a^r(\sqrt[p]{b^2}c\sqrt{m})\right)}}\right\}}$.

b) Die nachstehenden Bruchpotenzen sind als Wurzelgrößen darzustellen.

1) $x^{\frac{n}{m}}$. 2) $c^{\frac{m}{n}}$. 3) $d^{\frac{p}{m-r}}$. 4) $\frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{p}{m}}}$. 5) $\frac{c^{\frac{2}{2p-3}}}{x^{\frac{p+3}{2p-3}}}$.

6) $a^{-\frac{2}{3}}$. 7) $x^{-\frac{r}{m}}$. 8) $b^{-\frac{m}{p+3}}c^{-\frac{3}{p+3}}$. 9) $\frac{a}{a^{\frac{r}{m}}}$. 10) $\frac{2}{x^{\frac{m}{p+3}}g^{\frac{p}{p+3}}}$.

11) $\frac{1}{a^{\frac{2r}{pr-3m}}x^{\frac{3p}{pr-3m}}}$. 12) $a^{\frac{2n}{m}}c^{\frac{3}{r}}m^{\frac{r}{p}}$. 13) $\frac{a^{\frac{m}{x}}c^{\frac{q}{p}}}{f^{\frac{p}{n}}a^{\frac{r-1}{m}}}$. 14) $a^{\frac{2}{p}}c^{\frac{3}{pr}}$.

15) $g^{\frac{2}{m-1}}f^{\frac{p}{m-1}}d^{\frac{m+5}{nm-n}}$. 16) $a^{\frac{r}{z}}x^{\frac{n}{pz}}g^{\frac{2p}{m+2}}x^{\frac{1}{m+2}}f^{\frac{2p}{mr+2r}}x^{\frac{2}{r(m+2)}}$.

17) $\frac{x^{\frac{n}{p}}a^{\frac{r}{pm}}}{c^{\frac{m}{2n}}f^{\frac{q}{2pn}}}$. 18) $\frac{a^{\frac{1}{m}}c^{\frac{p}{nm}}}{g^{\frac{1}{m}}h^{\frac{2p}{mr}}}$. 19) $\frac{c^{\frac{2r}{p+1}}a^{\frac{n}{p(p+1)}}}{m^{\frac{r}{p+1}}c^{\frac{m}{(p+1)(p+2q)}}}$.

20) $\frac{c^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{mn}}d^{\frac{3}{mnr}}}{f^{\frac{p}{n}}g^{\frac{r}{3n}}m^{\frac{1}{6n}}}$. 21) $\frac{a^{\frac{1}{pm}}b^{\frac{q}{pn}}}{c^{\frac{n}{2pr}}x^{\frac{m}{4p}}}$. 22) $\frac{2^{\frac{1}{p+2}}a^{\frac{p}{3(p+2)}}d^{\frac{r}{p+2}}f^{\frac{n}{pr+2r}}}{x^{\frac{m}{pm+2p}}b^{\frac{r}{p+2}}z^{\frac{2p}{pn+2n}}}$.

2) Die Spezies mit Wurzelgrößen.

1) Wenn lassen sich Bruchpotenzen unmittelbar addiren?
2) Worin besteht das Homogensein der Bruchpotenzen?
3) Wie geschieht die Multiplikation mit Bruchpotenzen?
4) Wie wird die Division mit Bruchpotenzen verrichtet?

Aufgaben.

a) Addition mit Bruchpotenzen.

1) $(a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}})$. 2) $(3c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{5}c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})$. 3) $(5c^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{2}}-4c^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{2}})$.

4) $\left(2m^{\frac{2}{3}}c^{\frac{p}{2}}x^{\frac{r-3}{2}}-4m^{\frac{2}{3}}c^{\frac{p}{2}}x^{\frac{r-2}{2}}+5\tfrac{3}{4}m^{\frac{2}{3}}c^{\frac{p}{2}}x^{\frac{r-2}{2}}\right)$.

5) $\left(4cx^{\frac{r-m}{m}}-2acx^{\frac{r-m}{m}}+6a^2c^3x^{\frac{1-m}{m}}\right)$.

6) $\left(a^{\frac{m}{n}} - b^{\frac{m+1}{n}} + 2hx^{\frac{2p+r}{x}} + 2gh^{\frac{r-3}{m+1}}\right) - \left(\frac{2}{5}a^{\frac{m}{n}} - ab^{\frac{m+1}{n}} - 5ahx^{\frac{2p+r}{x}} + 5gh^{\frac{r-3}{m+1}}\right)$.

7) $\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}} - \frac{4dx^{\frac{5}{4}}c^{\frac{3}{2}}}{3a(m+1)^{\frac{2}{3}}} + \frac{3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}} + \frac{5}{6}dx^{\frac{5}{4}}c^{\frac{3}{2}}a^{-1}(m+1)^{-\frac{2}{3}}\right)$.

8) $\left(5a^{-\frac{2}{3}}c^{\frac{p}{q}}x^{-\frac{r-3}{p}} + 2c^{\frac{2}{m}}x^{-\frac{p}{m}} + 3a^{-\frac{5}{6}}m^{-\frac{5}{6}}n^{-\frac{p}{6}}x^{\frac{r-1}{6}}\right) - \left(2\frac{b^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{r-3}{p}}} + 2\frac{x^{-\frac{p}{m}}}{c^{-\frac{2}{m}}m^{\frac{p}{m}}} + 2\frac{a^{-\frac{5}{6}}x^{\frac{r-1}{6}}}{m^{\frac{5}{6}}n^{\frac{p}{6}}}\right)$.

b) Multiplikation mit Bruchpotenzen.

1) $a^{\frac{p}{n}} \times a^{\frac{m}{n}}$. 2) $c^{\frac{r}{3}}x^{\frac{5}{3}} \times -c^{\frac{p}{3}}x^{\frac{m}{3}}$. 3) $a^{\frac{m+n}{p}}x^{\frac{qr}{p}}z^{\frac{3}{p}} \times 5a^{\frac{m}{p}}x^{\frac{4}{p}}z^{\frac{m-3}{p}}$.

4) $3bc^{\frac{pp+r}{m}} \times -6b^{\frac{m}{2}}xc^{\frac{m-2p}{m}}$.

5) $3\frac{2}{3}m^{\frac{p+3}{m+1}}(m-3)^{\frac{p+1}{m+1}} \times 3b^{r}x^{\frac{2}{m+1}}m^{\frac{1}{m+1}}(m-3)^{\frac{q-3}{m+1}}$.

6) $\frac{a^{\frac{p}{q}}x^{\frac{m}{q}}}{c^{\frac{x}{q}}f^{\frac{3}{q}}} \times \frac{a^{\frac{r}{q}}x^{\frac{3}{q}}}{c^{\frac{2}{q}}f^{\frac{1}{q}}}$, 7) $\frac{4m^{\frac{p+1}{3}}n^{\frac{m+p}{3}}}{3cx^{\frac{p-q}{3}}z^{\frac{r-1}{3}}} \times \frac{bm^{\frac{2}{3}}n^{\frac{m}{3}}}{5x^{\frac{m+q}{3}}z^{\frac{5}{3}}}$.

8) $\frac{a^{r}b^{q}c^{\frac{r}{p+1}}x^{\frac{q-4}{2}}}{mz^{pq}(2p+3)^{\frac{m-5p}{n}}} \times ab^{m-2q}x^{\frac{3p+5}{2}}$.

9) $5\frac{1}{4}c^{\frac{r-3}{p+q}}d^{\frac{2p+3}{p+q}}(2m-1)^{\frac{p-m}{p+q}} \times \frac{6c^{\frac{p+4}{p+q}}(2m-1)^{\frac{2m+n}{p+q}}}{7a^{r}x^{\frac{m-1}{p+q}}z^{\frac{r-1}{p+q}}}$.

10) $a^{\frac{p+m}{x-3}}b^{-\frac{r+3}{x-p}} \times 5a^{-\frac{m-r}{x-3}}b^{\frac{r-1}{x-p}}$.

11) $x^{\frac{p}{m}} \times x^{\frac{m}{n}}$. 12) $a^{\frac{p+3}{m}} b^{\frac{q-3}{p}} \times a^{\frac{n+1}{n}} b^{\frac{r-1}{r}}$.

13) $3a^{\frac{r}{p}} x^{\frac{q}{n}} \times -4a^{\frac{p}{q}} x^{-\frac{m}{r}}$.

14) $\dfrac{c^{\frac{m-1}{p}} x^{\frac{r-3}{q}}}{f^{\frac{r-3}{m}} z^{\frac{p-1}{m}}} \times \dfrac{c^{\frac{r+1}{q}} x^{\frac{p+3}{p}}}{z^{\frac{p-1}{r}}}$.

15) $(a+b)^{\frac{m+1}{2}} \times (a+b)^{\frac{p+3}{3}}$.

16) $-2a^{\frac{p+q}{2}} b^{\frac{r}{2}} (c-1)^{\frac{r+m-1}{2}} \times 3a^{\frac{2p}{3}} b^{\frac{m-r}{3}} (c-1)^{\frac{p+q-3}{3}}$.

17) $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{pn}}$. 18) $b^{\frac{2m-1}{m+1}} \times b^{\frac{3}{p(m+1)}}$.

19) $\dfrac{c^{\frac{r}{2p+6}}}{f^{\frac{m}{2p+6}}} \times \dfrac{c^{\frac{m+1}{p+3}}}{f^{\frac{p+q}{2}}}$. 20) $\left(a^{\frac{n}{m}} - b^{\frac{r}{m}} - c^{\frac{p}{m}}\right) \cdot a^{\frac{p}{m}} c^{\frac{r}{m}}$.

21) $\left(5a^{\frac{2}{3}} - 3bc^{\frac{3}{2}} + 5a^2 mg^{\frac{1}{2}}\right) \cdot ab^{\frac{1}{2}} c^{\frac{5}{2}} m^{\frac{1}{2}}$.

22) $\left(a^{\frac{m}{3}} - a^{\frac{m+1}{3}} - a^{\frac{p+q}{3}}\right) \cdot a^{\frac{r-1}{3}}$.

23) $\left(a^{\frac{2r}{m+1}} b^{\frac{q+3}{m+1}} + 4a^{\frac{p}{m+1}} b^{q} + 3fga^{\frac{r}{m+1}} b^{\frac{m}{m+1}}\right) \times 3a^{\frac{m}{m+1}} b^{\frac{n}{m+1}}$.

24) $\left(a^{\frac{1}{m}} - a^{\frac{m}{n}} + 3a^{\frac{q}{p}}\right) \cdot 3a^{\frac{3}{r}}$.

25) $\left(a^{\frac{x-1}{n+3}} b^{\frac{q+3}{n+3}} + 4ma^{\frac{2r-1}{p+2}} b^{\frac{m}{p+2}} - 4gha^{\frac{1}{r-p}} b^{\frac{r-1}{r-p}}\right) \times a^{\frac{r}{q+n}} b^{\frac{m}{q+n}}$.

26) $\left(a^{\frac{n}{pm}} + a^{\frac{1}{pn}} c^{\frac{2r}{pn}} - a^{\frac{m}{3p}} c^{\frac{n}{3p}}\right) \times a^{\frac{m+n}{2p}} c^{\frac{p+m}{2p}}$.

27) $\left(a^{\frac{1}{m}} - b^{\frac{1}{m}} + c^{\frac{1}{m}}\right)\left(g^{\frac{r}{m}} - h^{\frac{p}{m}}\right)$.

28) $\left(a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{3}} - 3b^{\frac{1}{3}}g^{\frac{2}{3}} - 5m^{\frac{4}{3}}n^{\frac{5}{3}}\right)\left(h^{\frac{1}{2}}p^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{5}} - 3xm^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{5}}\right)$.

29) $\left(a^{\frac{1}{m}}x^{\frac{1}{m}} - b^{\frac{1}{n}}g^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{q}}z^{\frac{1}{q}} - z^{\frac{2}{3}} + 2hm^{\frac{3}{n}}\right)$.

30) $\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} - m^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} - 5m^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{3}}\right)$.

31) $\left(m^{\frac{1}{2}p}p^{\frac{q}{2}} - 2a^{\frac{r-1}{m}} + 3zq^{\frac{1}{p+3}}r^{\frac{1}{p+3}}\right)\left(m^{\frac{1}{2}}p^{\frac{q}{2}} - 5a^{\frac{r-1}{m}}\right)$.

c) Division mit Bruchpotenzen.

1) $a^{\frac{4}{3}} : a^{\frac{2}{3}}$. 2) $a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{p}{n}} : a^{\frac{x}{n}}b^{\frac{m}{n}}$.

3) $6^{\frac{m+1}{p}}x^{\frac{r}{p}}(a+1)^{\frac{2r+3}{p}} : 3^{-\frac{p-m}{p}}2^{\frac{2-m}{p}}(a+1)^{\frac{5-2r}{p}}$.

4) $3a^{2p}x^{r}z^{\frac{p-r}{m+r}} : 4a^{m+3}x^{\frac{pr-r}{p}}z^{\frac{2p+3r}{m+1}}$.

5) $\dfrac{m^{\frac{p}{q+1}}n^{\frac{r}{q+1}}}{p^{\frac{m}{q+1}}z^{\frac{n}{p+q}}} : m^{\frac{r+p}{q+1}}n^{-\frac{m}{q+1}}p^{-\frac{2m}{q+1}}z^{-\frac{m+n}{p+p}}$.

6) $x^{\frac{m}{3}} : x^{\frac{p}{2}}$. 7) $a^{\frac{r-1}{p+m}}x^{\frac{5-p}{r}} : a^{\frac{2p+3}{m}}x^{-\frac{q+3p}{p+3}}$.

8) $f^{\frac{r-3}{x+1}}g^{\frac{m+3}{x+1}} : f^{\frac{p-3}{r+3}}g^{\frac{x+1}{m+3}}$. 9) $m^{\frac{m}{np}}n^{\frac{m+1}{mp}} : m^{\frac{r+3}{p}}n^{\frac{m+1}{p}}$.

10) $a^{\frac{2r}{n}}x^{\frac{q}{p}}z^{-\frac{2}{q}} : a^{\frac{p}{2mn-pn}}x^{-\frac{2p-q}{2pm-pp}}z^{-\frac{2r+3p}{2qm-pq}}$.

11) $3b^{\frac{n}{mr}}c^{-\frac{p}{3r}}f^{\frac{m}{pr}} : 18b^{\frac{q}{pm}}c^{\frac{r}{3p}}f^{-\frac{3}{pp}}$.

12) $$\frac{h^{\frac{m+n}{2pm}}\,l^{\frac{2r-3}{mr}}}{m^{\frac{q}{mz}}} : h^{\frac{r+n}{2pn}}\,l^{-\frac{p-n}{nr}}\,m^{-\frac{r+x}{nz}}$$

13) $$\left(9a^{\frac{2+r}{p}}b^{\frac{r-1}{m}}x^{\frac{r+q}{2m}}z^{\frac{3p+1}{r}} - 75a^{\frac{2r}{p}}b^{\frac{mm+2pr-2p}{2pm}}x^{\frac{q}{2m}}z^{\frac{2p+q+1}{r}}\right.$$
$$\left.+ 12a^{\frac{r}{p}}b^{\frac{q+r+2}{m}}x^{\frac{p+q}{2m}}z^{\frac{2p+1}{r}}\right) : 15a^{\frac{r}{p}}b^{\frac{r-1}{m}}x^{\frac{q}{2m}}z^{\frac{2p+1}{r}}.$$

14) $$\left(a^{\frac{m-r}{n}}x^{\frac{r-1}{m}}z^{\frac{2p+4}{3}} - 2x^{\frac{r+m+2}{m}}z^{\frac{p+r}{3}} - a^{\frac{m-2r}{n}}x^{\frac{q-3}{m}}z^{\frac{p+3}{3}} +\right.$$
$$\left. a^{-\frac{r}{n}}x^{\frac{q+m}{m}}z^{\frac{r-1}{3}} + 2a^{\frac{m-r}{n}+2m}z^{\frac{m+p}{3}} - 4a^{2m}x^{\frac{m+3}{m}}z^{\frac{m+r-4}{3}}\right) :$$
$$: \left(a^{\frac{m-r}{n}}z^{\frac{p+3}{3}} - 2x^{\frac{m+3}{m}}z^{\frac{r-1}{3}}\right).$$

15) $$\left(6a^{\frac{2p}{m}} + 25a^{\frac{2p}{m}}b^{\frac{q+r}{n}} + 25a^{\frac{2p}{m}}b^{\frac{2q+2r}{n}}\right) : \left(2a^{\frac{p}{m}} + 5a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q+r}{n}}\right).$$

16) $$\left(15a^{\frac{4p+2r}{3}}b^{\frac{4r-2p}{3}} - 17a^{\frac{2p+r}{3}}b^{\frac{2r+m}{3}}c^{\frac{r-p}{3}} - 42b^{\frac{2m+2p}{3}}c^{\frac{2r-2p}{3}}\right) :$$
$$: \left(5a^{\frac{2p+r}{3}}b^{\frac{2r-p}{3}} + 6b^{\frac{m+p}{3}}c^{\frac{r-p}{3}}\right).$$

17) $$\left(6x^{\frac{2p+2q}{p+3}}z^{\frac{2m-2p}{p+3}} - 5a^{\frac{m-3}{2}}b^{\frac{q-r}{2}}x^{\frac{p+q}{p+3}}z^{\frac{m-p}{p+3}} - 14a^{m-3}b^{q-r}\right.$$
$$- 18a^{\frac{m+3}{2}}x^{\frac{2p+2q+(p+3)(m-q)}{2(p+3)}}z^{\frac{m-p}{p+3}} - 40a^{m}b^{\frac{q-r}{2}}x^{\frac{m-q}{2}} -$$
$$\left. - 24a^{m+3}x^{m-q}\right) : \left(6x^{\frac{q+p}{p+3}}z^{\frac{m-p}{p+3}} + 7a^{\frac{m-3}{2}}b^{\frac{q-r}{2}} +\right.$$
$$\left. + 6a^{\frac{m+3}{2}}x^{\frac{m-q}{2}}\right).$$

18) $$\left(c^{\frac{2p-2}{m}}x^{\frac{2p}{m}} - 9x^{\frac{2p+6}{m}}z^{\frac{2r+2}{m}}\right) : \left(c^{\frac{p-1}{m}}x^{\frac{p}{m}} + 3x^{\frac{p+3}{m}}z^{\frac{r+1}{m}}\right).$$

19) $(x^2 - y^2) : \left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right).$

20) $\left(a^{\frac{m}{2p}} - c^{\frac{p}{q}}\right) : \left(a^{\frac{3m}{8p}} + a^{\frac{m}{8p}} c^{\frac{p}{2q}} + a^{\frac{m}{4p}} c^{\frac{p}{4q}} + c^{\frac{3p}{4q}}\right).$

VI.

Imaginäre Größen.

1) Verwandlung imaginärer Größen.

1) Wenn heißt ein Wurzelausdruck imaginär und wenn reell?

2) Auf welche Form läßt sich jede imaginäre Größe $\sqrt[2p]{-a}$ reduziren?

3) Auf welche Weise entwickelt man die auf einanderfolgenden Potenzen einer imaginären Größe $\sqrt{-a}$ und $-\sqrt{-a}$?

4) Was hat man bei dem Gleichnamigmachen imaginärer Größen zu beobachten?

Aufgaben.

a) Die in den folgenden Beispielen enthaltenen imaginären Größen sind auf die Form: $\sqrt[2p]{-m} = \sqrt[2p]{m} . \sqrt{-1}$ zu reduziren.

1) $\sqrt{-a}$. 2) $\sqrt{-b^m}$. 3) $\sqrt[2p]{-a}$. 4) $\sqrt[2r]{-a^n}$.

5) $\sqrt[2p+2q]{-a^{p+1}}$. 6) $\sqrt[2r+1]{-x^{q+2}}$. 7) $\sqrt[2(p+1)]{-z^{-(p+1)}}$.

8) $\sqrt[3(2m+1)]{-p^{-(q+2)}}$. 9) $\sqrt[-2m]{-a^p}$. 10) $\sqrt[-4m]{-c^{3p}}$.

11) $\sqrt[-(2p+2)]{-f^{r-1}}$. 12) $\sqrt[-(2r-4)]{-h^{q-3}}$. 13) $\sqrt[-2m]{a^{-n}}$.

Anmerkung. Von hier bis mit Seite 51 sollen die allgemeinen Größen in den Exponenten ungerade Zahlen darstellen.

14) $\sqrt[-2r]{-a^{-m}}$. 15) $\sqrt[-(2r-3)]{-a^{-(x+1)}}$. 16) $\sqrt[2m]{-x^{2mn}}$.

17) $\sqrt[2n-2]{-z^{-(6n-6)}}$. 18) $\sqrt{-16}$. 19) $\sqrt{-25}$.

20) $\sqrt[3]{-8}$. 21) $\sqrt{-\frac{16}{25}}$. 22) $\sqrt[2n]{-a^{3n}}$.

23) $\sqrt[2r-2]{-m^{4pr-5p}}$. 24) $\sqrt[-(2q-6)]{-m^{-(q-4)}n^{4q-8}}$.

25) $\sqrt{-8}$. 26) $\sqrt{-32}$. 27) $\sqrt{-48a^{2r-3}b^{2q-1}}$.

28) $\sqrt[2r]{\left(-\frac{16a^{3r}b^{2mr}}{9c^{4pr}f^{qr}}\right)}$.

b) Potenzen imaginärer Größen.

1) $(\sqrt{-a})^2$ 2) $(\sqrt{-a})^3$ 3) $(\sqrt{-a})^4$

4) $(\sqrt{-a})^5$ 5) $(\sqrt{-a})^6$ 6) $(\sqrt{-a})^7$

7) $(-\sqrt{-c})^2$ 8) $(-\sqrt{-c})^3$ 9) $(-\sqrt{-c})^4$

10) $(-\sqrt{-c})^5$ 11) $(-\sqrt{-c})^6$ 12) $(-\sqrt{-c})^7$

13) $(-m\sqrt[2r]{-n})^3$ 14) $\left(-\frac{2x}{3z}\sqrt[2p-2]{-2xz}\right)^4$

15) $\left(-\frac{m}{2x+1}\sqrt[2p-2]{\left(-\frac{2a}{3x}\right)}\right)^7$ 16) $\left(\frac{m+1}{x-1}\sqrt{-c}\right)^2$

17) $\left(\frac{m-3}{z-1}\sqrt{-(m-1)}\right)^3$ 18) $\left(\frac{m^{2p}}{x^{3r}}\sqrt[2p-2q]{\left(-\frac{x}{3c}\right)}\right)^5$

19) $\left(-\frac{m^r x^p}{n^r z^{q+3}}\sqrt[4q-2]{-\left(\frac{x^r z}{m}\right)}\right)^{11}$

20) $\left(-\frac{2xz}{mn^r}\sqrt[2p]{-m^{3r}z^p}\right)^{12}$

c) Die nachstehenden Wurzelgrößen sind gleichnamig zu machen.

1) $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{c}$. 2) $\sqrt[6]{m}$, $\sqrt[12]{n}$.

3) $\sqrt[8]{r}$, $\sqrt[2]{p}$. 4) $\sqrt[2p]{z}$, $\sqrt[2x]{p}$.

5) $\sqrt[14]{m}$, $\sqrt{n}$. 6) $\sqrt[16]{5}$, $\sqrt{6}$.

7) $\sqrt[8x]{n}$, $\sqrt[2x]{p}$. 8) $3a\sqrt[18]{p}$, $\sqrt[6]{c}$.

9) $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[8]{c}$.

10) $a\sqrt[2m]{n}$, $\frac{2a}{3}\sqrt[6m]{p}$, $\sqrt[12m]{\left(\frac{a}{b}\right)}$.

11) $\frac{a}{2}\sqrt[6r]{m}$, $\frac{m}{n}\sqrt[2r]{p}$, $\frac{1}{2xz}\sqrt[4r]{\left(\frac{m}{n}\right)}$, $\sqrt[12r]{\left(\frac{p}{z}\right)}$.

12) $3\sqrt[6]{3}$, $\frac{4a}{3c}\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{\frac{m}{2}}$, $\sqrt[12]{\left(\frac{5}{2m}\right)}$, $\sqrt[8]{\left(\frac{3}{x}\right)}$.

13) $\sqrt[6m]{a}$, $\sqrt[4m]{b}$. 14) $\sqrt[20p]{c}$, $\sqrt[28p]{m}$.

15) $\sqrt[12x]{2}$, $\sqrt[32x]{c}$. 16) $3z\sqrt[4m]{z}$, $\frac{2a}{r}\sqrt[18m]{p}$.

17) $\sqrt[6n-8]{2x}$, $\sqrt[8m-8]{y}$. 18) $2m\sqrt[4x+8]{z^3}$, $\sqrt[10x+20]{2m^5}$.

19) $\sqrt[4z-42]{3m}$, $\sqrt[18z-18]{p^{-5}}$. 20) $\sqrt[18x+18z]{2m}$, $\sqrt[4x+4z]{3n}$.

21) $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[6]{b}$, $\sqrt[10]{c}$.

22) $\sqrt[6]{m}$, $\sqrt[12]{n}$, $\sqrt[21]{c}$.

23) $\sqrt[20]{x}$, $\sqrt[16]{q}$, $\sqrt[12]{r}$.

24) $\sqrt[8]{x^3}$, $\sqrt[12]{p}$, $\sqrt[4]{m}$, $\sqrt[20]{r}$.

2. Die Spezies imaginärer Größen.

a) Addition und Subtraktion imaginärer Größen.

1) Wie verfährt man bei der Addition homogener imaginärer Größen.

2) Wie wird die Subtraktion imaginärer Größen ausgeübt.

Aufgaben.

1) $(2x\sqrt{-1} + 3bx\sqrt{-1} - 5x\sqrt{-1} + 4bx\sqrt{-1})$.

2) $(4mx\sqrt{-1} + 2hm\sqrt{-1} + 3gh\sqrt[3]{-1} + 2m\sqrt[3]{-1} +$
$3hm\sqrt{-1}.)$

3) $(4gx\sqrt{-1} - 3m\sqrt{-1}) + (2n\sqrt{-1} + 3\sqrt{-1} + 2c\sqrt{-1})$
$- (5nm\sqrt{-1} - 5m\sqrt{-1} + 5gx\sqrt{-1})$.

4) $(\sqrt{-b^2} - \sqrt[-2n]{-a^{-4n}} + \sqrt{-b^2} - \sqrt[-2n]{-a^{-4n}})$.

5) $(\sqrt{-a^2} - \sqrt{-b^2} + \sqrt{-c^2})$.

6) $(3\sqrt{-m^2} - \sqrt{-4x^2} + 4\sqrt{-m^2n^2} - \sqrt{-4p^2x^2})$.

7) $(\sqrt{-4} + \sqrt{-b^2} - \sqrt{-c^2}) - (\sqrt{-9} + \sqrt{-m^2}$
$+ \sqrt{-c^2})$.

8) $(\sqrt{-9g^2} - \sqrt[2r]{-4^r m^{2r}} - \sqrt{2^{4p} g^{2pn}} + 2\sqrt[2n]{-p^{rn} q^{2n}})$.

9) $(\sqrt[2n]{-a} + 3\sqrt[2n]{-a} + 3c\sqrt[2n]{-a})$.

10) $(3m\sqrt[2p]{-x} + 4mn\sqrt[2p]{-x} + 5m\sqrt[2p]{-x} + 2gh\sqrt[2p]{-x})$.

11) $(3\sqrt{-a^3 g^{2r} m} - 5\sqrt{-a^3 g^{2p} m} - \sqrt{-9a^5 m^{2p+1}})$.

12) $(\sqrt{-25x^{4m+r} g^{5p}} - y^q\sqrt{-9x^{-r} y^p} + 2\sqrt{-4x^{r+6} y^{p+2} z^2})$.

13) $(a^2\sqrt{-9a} - \sqrt{-25z^3} + 2\sqrt{-4a^3} - \sqrt{-25b^2 z} +$
$2\sqrt{-r^2 f} - \sqrt{-9ap^2} + \sqrt{-9f})$.

b) Multiplikation imaginärer Größen.

1) Ist das Produkt aus einer reellen und imaginären Größe, reell oder imaginär?

2) Ist das Produkt zweier imaginärer Faktoren reell oder imaginär?

3) Wie verhält es sich mit dem Zeichen des Produktes einer imaginären und reellen Größe?

4) Welche Regel findet für das Zeichen des Produktes aus zwei imaginären Faktoren statt?

Aufgaben.

1) $x \times \sqrt{-a}$. 2) $(2a - 3c + 2m) \times -\sqrt{-m}$.

3) $(3b - 2g + 4m + 3) \times 3bh\sqrt{-n}$.

4) $(2\sqrt{-a} + 3c\sqrt{-a} + 4g\sqrt{-a}) \times -3cg$.

5) $\sqrt{a} \times \sqrt{-b}$. 6) $2\sqrt{-p} \times 5ac\sqrt{r}$.

7) $(3bc\sqrt{m} - 4gh\sqrt{r} + 5h\sqrt{17}) \times -2r\sqrt{-p}$.

8) $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$. 9) $3am\sqrt{-cx} \times 3hx\sqrt{-gx}$.

10) $(\frac{3a}{2b}\sqrt{-gx} \times \frac{3hm}{5c}\sqrt{-gp}$.

11) $(3\sqrt{-c} + 4\sqrt{-m} + 3\sqrt{-n}) \times \sqrt{-p}$.

12) $(2n\sqrt{-c} - 3g\sqrt{-f} + 3m\sqrt{-k}) \times -2cx\sqrt{-l}$.

13) $(3\sqrt{-6} - 7\sqrt{-12} + 4\sqrt{-2}) \times 6\sqrt{-12}$.

14) $(\sqrt{-m} + n\sqrt{-p}) \times (\sqrt{-n} + r\sqrt{-z})$.

15) $(6c^3x\sqrt{-2p} + 4g\sqrt{-r} - 3gh\sqrt{-q}) \times (\sqrt{-2c} + 3\sqrt{-pr})$.

16) $(3a\sqrt{-c} - 6mx\sqrt{-bc} + 4hm\sqrt{cx} + 2a) \times (\sqrt{-cm} + 3\sqrt{-cx} - 4\sqrt{bc})$.

17) $(m\sqrt{-a} + 6c\sqrt{-c}) \times (m\sqrt{-a} + 6c\sqrt{-c})$.

18) $(mx\sqrt{-p} + 3qr\sqrt{-pm}) \times (2mx\sqrt{-p} - 5qr\sqrt{-pm})$.

19) $(3\sqrt{-5}+4\sqrt{-15}) \times (3\sqrt{-5}+6\sqrt{-15})$.

20) $(m\sqrt{-n}+n\sqrt{-m}) \times (m\sqrt{-n}-n\sqrt{-m})$.

21) $(3\sqrt{-2}-4\sqrt{-6}) \times (3\sqrt{-2}+4\sqrt{-6})$.

22) $(2y\sqrt{a}+5z\sqrt{-b}) \times (x\sqrt{a}+5z\sqrt{-b})$.

23) $(3m^2r\sqrt{-z}-5h\sqrt{c}) \times (m^2r\sqrt{-z}-6h\sqrt{c})$.

24) $\sqrt[3]{a}\times 2\sqrt{-b}$. 25) $3cx\sqrt[3]{-m}\times 3cg\sqrt{n}$.

26) $4m\sqrt[4]{-f}\times -6g\sqrt[3]{m}$.

27) $3cx\sqrt[6]{-p^r}\times -7c^3gx\sqrt[3]{-p^q}$.

28) $\sqrt{-m}\times\sqrt[4]{-n}$. 29) $\sqrt[4m]{-a^2x^3}\times\sqrt[2m]{-ax^2}$.

30) $(a\sqrt{-b}+\sqrt[4]{-m}-c\sqrt[3]{-n})\times -p\sqrt[12]{-h}$.

31) $(\sqrt[4]{-a}-\sqrt{-c}+3c\sqrt[6]{-c})\times -2g\sqrt[4]{-f}$.

32) $(\sqrt{-m}-3\sqrt[4]{-n})\times(\sqrt{-r}-3\sqrt[4]{-m})$.

33) $(\sqrt[6]{-2x}-3ac\sqrt[3]{-4c}+3m\sqrt[4]{-2x})\times(-\sqrt{-c}-$
$-5m\sqrt[4]{-z})$.

34) $(\sqrt{-5}-\sqrt[4]{-3})\times(\sqrt{-5}-\sqrt[4]{-3})$.

35) $(\sqrt{-a}+6\sqrt[4]{c}+\sqrt[8]{-m})\,(3\sqrt{-a}+2\sqrt[4]{-c}+5\sqrt[8]{-m})$.

36) $(\sqrt[3]{-m}-3\sqrt{-n})\,(\sqrt[3]{-m}+3\sqrt{-n})$.

37) $(\sqrt[2p]{-a}-3\sqrt[4p]{-z}+5\sqrt[6p]{-q})\,(\sqrt[2p]{-a}+3\sqrt[4p]{-z}-5\sqrt[6p]{-q})$.

38) $(\sqrt[6q]{-m}+2a\sqrt[2q]{-r}-c\sqrt[4q]{-p})\,(\sqrt[6q]{-m}-a\sqrt[2q]{-r}+$
$5c\sqrt[4q]{-p})$.

39) $(x-a\sqrt{-1})\,(x+a\sqrt{-1})$.

40) $(x - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\sqrt{-3})\,(x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{-3})\,(x + a)$.

41) $(x + \frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{1}{2}a\sqrt{-1})\,(x + \frac{1}{2}a\sqrt{3} + \frac{1}{2}a\sqrt{-1})\,(x^3 + a^3)$.

c) Division imaginärer Größen.

1) Ist der Quotient reell oder imaginär, wenn der Divisor imaginär und der Dividend reell, oder der Divisor reell und der Dividend imaginär ist?

2) Wie ist der Quotient, wenn Divisor und Dividend imaginär sind?

3) Welche Regel gilt für den Quotienten, wenn der Divisor reell und der Dividend imaginär, oder wenn der Divisor imaginär und der Dividend reell ist?

4) Und welche Regel findet dann für den Quotienten statt, wenn Divisor und Dividend imaginär sind?

Aufgaben.

1) $a : \sqrt{-c}$.   2) $2m : 2\sqrt{-x}$.   3) $-c : \sqrt{-p}$.

4) $-3x^2r : 6ghx\sqrt{-q}$.   5) $m : -\sqrt{-c}$.

6) $4cx : -\sqrt{-rx}$.   7) $-2a : -ah\sqrt{-2pq}$.

8) $-\frac{a^2x}{m^2n} : -\frac{2a}{b}\sqrt{-n}$.   9) $\sqrt{a} : \sqrt{-b}$.

10) $m\sqrt{2c} : \sqrt{-mn}$.   11) $\frac{a}{b}\sqrt{mn} : \sqrt{-5}$.

12) $-\frac{3ab}{2gh}\sqrt[6m]{\left(\frac{a}{x}\right)} : \frac{5x}{c}\sqrt[6m]{\left(-\frac{c}{q}\right)}$.

13) $\sqrt{a} : -\sqrt{-b}$.   14) $m\sqrt{f} : -\sqrt{-m}$.

15) $-m\sqrt{2x} : -6cx\sqrt{-pq}$.

16) $-\frac{2ax}{5pg}\sqrt{\left(\frac{m}{r}\right)} : 3ac\sqrt{-\frac{p}{r}}$.

17) $\sqrt{-a} : \sqrt{-b}$.   18) $a\sqrt{-c} : \sqrt{-m}$.

19) $\frac{a}{b}\sqrt{-x} : \sqrt{-qz}$.

20) $\frac{cm}{pq}\sqrt{-r} : m\sqrt{-pq}$.

21) $\frac{2m}{7}\sqrt[2q+2]{-3cx} : 7\sqrt[2q+2]{\left(-\frac{6m}{cx}\right)}$.

22) $-m\sqrt{-c} : \sqrt{mf}$.

23) $-\frac{6ac}{5mn}\sqrt{\left(-\frac{m}{n}\right)} : 3x\sqrt{-m}$.

24) $\sqrt{-am} : -\sqrt{-3x}$.

25) $\frac{am}{2p}\sqrt{\left(-\frac{c}{2x}\right)} : -gx\sqrt{\left(-\frac{p}{qz}\right)}$.

26) $-ac\sqrt{-x} : -\frac{am}{2c}\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)}$.

27) $\sqrt[4]{-a} : \sqrt{a}$.

28) $-\frac{ag}{2c}\sqrt[15]{\left(-\frac{2c}{3z}\right)} : -\frac{6ax}{mn}\sqrt[5]{pq^r}$.

29) $\sqrt[2p]{-m} : \frac{ax}{m}\sqrt[4p]{qz}$.

30) $\frac{2cx}{3m^2x^3}\sqrt{-3cx} : 3c^2x\sqrt[6]{2c^3x^4}$.

31) $\sqrt{-m} : a\sqrt[3]{c}$.

32) $-\frac{3cx}{2p}\sqrt[8]{-mn} : abx\sqrt[6]{n}$.

33) $mx\sqrt[4]{n} : \frac{2ax}{p}\sqrt{-c}$.

34) $\sqrt[6p]{-m} : \sqrt[2p]{-n}$.

35) $(\sqrt{pm}+2\sqrt{pn}-3p) : \sqrt{-p}$.

36) $(2am^2\sqrt{ac}+3m^2\sqrt{cq}+2cmx+x\sqrt{-cr}) : -m\sqrt{-c}$.

37) $(-4pgh\sqrt{-mhz} - 3ghp\sqrt{-gh} + 3ph\sqrt{h}) : -p\sqrt{-h}$.

38) $(-3\sqrt{mq} - 4\sqrt{mn} + 6c\sqrt{nq} + 8cn\sqrt{-1}) : (3\sqrt{-q} + 4\sqrt{-n})$.

39) $(-12pqm\sqrt{nz} - 9gm\sqrt{mn} - 8pqxz\sqrt{-rz} - 6gxz\sqrt{-mr}) : (4pq\sqrt{-z} + 3g\sqrt{-m})$.

40) $(-a + 7\sqrt{ab} - 12b) : (\sqrt{-a} - 4\sqrt{-b})$.

41) $(-12m + 40cx\sqrt{mr} - 25c^2rx^2) : (6\sqrt{-m} - 5cx\sqrt{-r})$.

42) $\left(-\frac{9a^5x}{16g^2} + 9b\right) : \left(\frac{3a^2x}{4g}\sqrt{-a} - 3\sqrt{-b}\right)$.

43) $(-a^2c + 9m^2x - 12am\sqrt{px} + a^2p) : (a\sqrt{-c} + 3m\sqrt{-x} - 2a\sqrt{-p})$.

44) $(-m^2\sqrt[p]{g} + h^2\sqrt[3p]{m} - 6hx\sqrt[6p]{mr^3} + 9x^2\sqrt[p]{-r}) :$
$: (m\sqrt[2p]{-g} - h\sqrt[6p]{-m} - 3x\sqrt[2p]{-r})$.

VII.

Potenzen und Wurzeln von mehrgliedrigen Wurzelgrößen und Bruchpotenzen.

a) Potenzen reeller Wurzelgrößen.

1) $(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$.

2) $(\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{cx} - \sqrt[m]{acx})^2$.

3) $\sqrt[2m]{a^3} - \sqrt[2m]{a^2b} + \sqrt[2m]{ab^2})^3$.

4) $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{c} + 2\sqrt[4]{f})^2$.

5) $(\sqrt[2m]{-c} + \sqrt[2p]{x})^3$.

6) $(3a\sqrt{m} - 2x\sqrt{n} + 2z\sqrt{p})^2$.

7) $(4a^2\sqrt[3]{a^2z} - 3m\sqrt[3]{az^2} - 2m\sqrt[3]{xz})^3$.

8) $(3m\sqrt[2p]{x} - 4m\sqrt[2p]{z} + 3p\sqrt[2p]{mz} - 3x\sqrt[2p]{2x})^2$.

9) $(2xz\sqrt[r]{m} + \frac{3cx}{m}\sqrt[p]{n} - 2cm\sqrt[q]{p})^2$.

10) $(2a^{2r}x\sqrt[2p]{a^2x} - 3m\sqrt[pq]{ax^2})^3$.

b) Potenzen von Bruchpotenzen.

1) $\left(a^{\frac{r}{2}} - b^{\frac{m}{2}} + 3z^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

2) $\left(3ax^{\frac{r}{p}} - 2m^{\frac{2p+1}{p}} - m^{\frac{1}{p}}\right)^3$.

3) $\left(\frac{6a^{\frac{r+1}{2m}}}{x^{\frac{p}{2m}}z^{\frac{r}{2m}}} - \frac{3b^{\frac{r}{2m}}}{z^{\frac{p}{2m}}} + 2z^{\frac{r+3}{2m}}x^{\frac{p+q}{2m}}\right)^2$.

4) $\left(\frac{3a^{\frac{r}{p}}}{2m^{\frac{q}{r}}} - \frac{2x^{\frac{m}{r}}}{m^{\frac{p}{q}}} + \frac{2m^{\frac{r}{2p}}}{3a^{\frac{m}{2p}}}\right)^2$.

5) $\left(a^{\frac{1}{2pm}}c^{\frac{1}{3pq}} - 4c^{\frac{2r+1}{2pm}} + 3ha^{\frac{m+1}{2px}}\right)^2$.

c) Potenzen imaginärer Wurzelgrößen.

1) $(\sqrt{-a} + \sqrt{-b})^2$. 2) $(\sqrt{-x} + \sqrt{-3px})^3$.

3) $(\sqrt[2m]{-x} - \sqrt[2m]{-r^2z})^2$. 4) $(\sqrt[4]{ax} - \sqrt[4]{-a^2x^3} - \sqrt[4]{-mx})^2$.

5) $(\sqrt[4p]{-z} - \sqrt[2pn]{-xz})^3$. 6) $(\sqrt[12]{-cx} - \sqrt[14]{-m^2x} + \sqrt[28]{-mx^2})^2$.

7) $(3\sqrt{-a} - 4\sqrt[4]{-c} + 2c\sqrt{-m})^2$.

8) $(6ac\sqrt[2m]{-2} + 3x\sqrt[4m]{-6})^3$.

9) $(\sqrt{-a} + 2\sqrt{b})^2$. 10) $(2x\sqrt[6]{m} - 2\sqrt[4]{-n})^3$.

11) $(mx\sqrt[4p]{-x} + 3m\sqrt{-2z} - 2mn\sqrt[3]{m})^2$.

d) Wurzeln aus vollständigen Potenzen reeller Größen.

1) $\sqrt{(a - 2\sqrt{ab} + b)}$.

2) $\sqrt[3]{(a\sqrt{a} + 3a\sqrt{2c} + 6c\sqrt{a} + 2c\sqrt{2c})}$.

3) $\sqrt{(m + 2\sqrt{mn} + n - 2\sqrt{mp} - 2\sqrt{np} + p)}$.

4) $\sqrt{(\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[6]{a^2c^3} + c)}$.

5) $\sqrt{(\sqrt{m} - 2\sqrt[12]{m^3x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[4]{mn^2} - 2\sqrt[6]{x^2n^3} + n)}$.

6) $\sqrt{(\sqrt[m]{a^2} - 2\sqrt[mn]{a^nb^m} + \sqrt[n]{b^2})}$.

7) $\sqrt[3]{(\sqrt[p]{x^3} + 3\sqrt[pq]{x^{2q}z^p} + 3\sqrt[pq]{x^qz^{2p}} + \sqrt[q]{z^3})}$.

8) $\sqrt[3]{(\sqrt[2p]{a^3} - 3\sqrt[2pm]{a^{2m}x^p} + 3\sqrt[2pm]{x^{2p}a^m} - \sqrt[2m]{x^3} + 3\sqrt[pm]{a^mz} -}$
$6\sqrt[2pm]{a^mz^2x^p} + 3\sqrt[pm]{x^pz} + 3\sqrt[2pm]{a^mz^4} - 3\sqrt[2pm]{x^pz^4} + \sqrt[pm]{z^3})$.

9) $\sqrt{(9b - 24c\sqrt{bc} + 16c^3)}$.

10) $\sqrt[3]{(8p^3\sqrt[m]{x^3} - 36p^2c\sqrt[m]{x^2p} + 54pc^2\sqrt[m]{p^2x} - 27c^3\sqrt[m]{p^3})}$.

11) $\sqrt{(16g^2h^2\sqrt[p]{mx} - 24g^2hz\sqrt[6p]{m^5x^5} + 9g^2z^2\sqrt[3p]{m^2x^2} +}$
$48ghz\sqrt[4p]{m^3x} - 36gz^2\sqrt[12p]{m^7x^4} + 36z^2\sqrt[2p]{m})$.

12) $\sqrt[3]{(27g^3x^3a - 108g^2x^2m\sqrt[6]{a^4c} + 144gxm^2\sqrt[3]{ac} -}$
$64m^3\sqrt{c} + 27g^2mnx^2\sqrt[9]{a^6h} - 72gm^2nx\sqrt[18]{a^6c^3h^2}$
$+ 48m^3n\sqrt[9]{c^3h} + 27m^2n^2x\sqrt[9]{a^3h^2} - 12m^3n\sqrt[18]{c^3h^4}$
$+ m^3n^3\sqrt[3]{h})$.

e) Wurzeln aus Bruchpotenzen.

1) $\sqrt{(ab^3 - 4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}} + 4z^3x^5)}$.

2) $\sqrt{(c^mx^n - 8ac^{\frac{m}{2}}x^{\frac{n}{2}}z^{p+\frac{1}{2}} + 16a^2z^{2p+1})}$.

3) $\sqrt[3]{(m^2x^5 - 21m^{\frac{5}{3}}x^{3\frac{1}{3}}p^{2\frac{1}{3}} + 147m^{\frac{4}{3}}p^{\frac{14}{3}}x^{\frac{5}{3}} - 343p^7m)}$.

4) $\sqrt{\left(p^{\frac{6}{m}}x^{\frac{2r}{m}} - 4p^{\frac{2m+3}{m}}x^{\frac{1}{m}+1}z^{\frac{p}{m}}y^{\frac{p+1}{m}} + 4p^4x^2z^{\frac{2p}{m}}y^{\frac{2p+2}{m}}\right)}$.

5) $\sqrt{(9x^2y^{\frac{1}{m}}-6xy^{\frac{1}{2m}}m^{\frac{1}{2m}}+m^{\frac{1}{m}}+18xy^{\frac{1}{2m}}z^{\frac{1}{2m}}-6m^{\frac{1}{2m}}z^{\frac{1}{2m}}+9z^{\frac{1}{m}})}$.

6) $\sqrt[3]{(a^2x-6a^{\frac{4}{3}}m^{\frac{3}{4}}x^{1\frac{5}{12}}+12a^{\frac{2}{3}}m^{\frac{3}{2}}x^{\frac{11}{16}}-8m^{\frac{9}{4}}x^{\frac{9}{4}})}$.

f) Wurzeln imaginärer Größen.

1) $\sqrt{(-m-2\sqrt{mn}-n)}$. 2) $\sqrt{(-x+2\sqrt{xz}-z)}$.

3) $\sqrt[3]{(-a\sqrt{-1}-3\sqrt[3]{a^2c}.\sqrt{-1}-3\sqrt[3]{ac^2}.\sqrt{-1}-c\sqrt{-1})}$.

4) $\sqrt[3]{(f-6\sqrt[3]{f^2}.\sqrt{-2}-24\sqrt[3]{f}+16\sqrt{-2})}$.

5) $\sqrt[3]{(-m\sqrt{-m}+3m\sqrt{-z}-3z\sqrt{-m}+z\sqrt{-z})}$.

6) $\sqrt[3]{(-2x\sqrt{-2x}+6x\sqrt[6]{xz}+3\sqrt{-2x}.\sqrt[3]{xz}-\sqrt{xz})}$.

7) $\sqrt{(-\sqrt[m]{a}-2\sqrt[2m]{ac}-\sqrt[m]{c})}$. *)

8) $\sqrt[3]{(-\sqrt[2p]{x}.\sqrt{-1}+3\sqrt[6p]{mx^2}.\sqrt{-1}-3\sqrt[6p]{m^2x}.\sqrt{-1}+\sqrt[2p]{m}.\sqrt{-1})}$. *)

9) $\sqrt{(\sqrt{-a}+2\sqrt[4]{-a}.\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})}$.

10) $\sqrt{(\sqrt[4]{-m}-2\sqrt[8]{-m}.\sqrt[4]{-m}+\sqrt{-m})}$.

11) $\sqrt[3]{(-\sqrt{-mn}-3\sqrt[3]{mn}.\sqrt[4]{-mx}-3\sqrt[6]{-mn}.\sqrt{-mx}+\sqrt[4]{-m^3x^3})}$.

12) $\sqrt{(-4x-12x\sqrt{z}-9xz)}$.

13) $\sqrt{(mx\sqrt[3]{mx}-2\sqrt[3]{m^2x^2}.\sqrt[4]{-mn}+\sqrt{-mn})}$.

14) $\sqrt{(-9m-30\sqrt{-mn}+25n)}$.

15) $\sqrt{(-16g^2h^2pq-16gh^2\sqrt{-pq}.\sqrt[3]{pn}+4h^2\sqrt[3]{p^2n^2})}$.

16) $\sqrt[3]{(8h^3x^3n\sqrt{n}-96h^2x^3nz\sqrt[6]{n}.\sqrt{-1}-384hx^3z^2\sqrt[3]{n}.\sqrt{n}+512x^3z^3\sqrt{n}.\sqrt{-1})}$.

*) m und p sollen ungerade Zahlen darstellen.

VIII.

Zerfällung in Faktoren *).

Aufgaben.

1) $(ab^m + 4b^m c)$.

2) $(6fmp - 3gmp)$.

3) $(a^m b^{2m+2} + a^{2m} b)$.

4) $(4ab^m c^2 (m+n) + 12ab^m c^2 (m-p))$.

5) $(3g^3 h(a-c)^{2m} - 4a^2 b^{4m-2} (a-c)^{2m})$.

6) $(15a^2 m^{3p+1} n^{2-4r} q(b+x)^{5m} - 18a^2 m^{p+1} n^{-1} (b+x)^{2m})$.

7) $(35b^3 c^{4m+3} x(m+5)^{4m-2q+3} - 30a^{-2} b^2 c^{6m} x^4 (m+5)^{2m+3n})$.

8) $(3a^2 b^2 dgh + 15acd^2 gh - 9adg^3 h + 12adgh^2)$.

9) $(24a^6 b^3 c^{-4} + 20a^5 b^4 c^{-4} + 12a^3 b^5 c^{-4} - 20a^3 b^2 c^{-4} h$
$+ 84a^3 b^2 c^{-4} dg)$.

10) $(\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad})$.

11) $(12\sqrt{cd} - 16a^2 \sqrt{cf} + 4a\sqrt{cgh})$.

12) $(6a^3 b^3 \sqrt[3]{cf^2} - 4a^2 b^4 c \sqrt[3]{c^2 gf})$.

13) $(12am^3 n^3 \sqrt[m]{cgx} - 16bm^2 n^4 \sqrt[m]{chx^2})$.

14) $(\sqrt{15} + \sqrt{21} - \sqrt{33})$.

15) $(6\sqrt{10} - 8\sqrt{15} + 16\sqrt{35})$.

16) $(3ab\sqrt{c} - 2bc\sqrt{a} - 7ac\sqrt{b})$.

17) $(3ab^m \sqrt[3]{x^2} - 4cdx \sqrt[3]{ax^{m+1} b^m} + amx^2 \sqrt[3]{b^m})$.

18($(56\sqrt{3} + 64\sqrt{5} - 8\sqrt{6})$.

19) $(30\sqrt[3]{2} - 60 + 28\sqrt[3]{3})$.

20) $(\sqrt[6]{a^5 c^2} + \sqrt[3]{abc} - \sqrt[12]{a^4 c^7})$.

21) $(4\sqrt[mr]{a^r e^m} - 8\sqrt[pr]{c^r e^p} - \sqrt[qr]{d^r e^q})$.

---

*) Ueber die Art und Weise, verschiedene Ausdrücke in ihre Faktoren zu zerlegen, sehe man die hierzu gehörige Note der Auflösungen.

22) $(4amx + 4anx + 5ghm + 5ghn)$.

23) $(3am^2 - 9am - 5a^2bdm + 15a^2bd)$.

24) $(6a^mb^nx - 6a^mb^ny^{-3} - 5x^{2m-4}y^8 - 5x^{2m+3}y^5)$.

25) $(9ac^2mx + 9bc^2mx - 12ag^3hm - 12bg^3hm - 12a^3g^{2m}h^{2r}m - 21m^4n^{2p-4} - 12ac^2nx - 12bc^2nx + 16ag^3hn + 16bg^3hn + 16a^3g^{2m}h^{2r}n + 28m^3n^{2p-3})$.

26) $[9m(a^2+x) + 15n(a^2+x) - 12m(b+3) - 20n(b+3) - 15m(c-y) - 25n(c-y)]$.

27) $[3a^{2m}b^{-4}c^2d^{-4}(f+g)^{2m+2r+7} - 5c^{6-n}d^{-4}(f+g)^{2m+3}(a-z)^{m+3} - 12a^{2m}b^{-4}g^{4-n}(f+g)^{2r+4}(a-z)^{-3} + 20c^{4-n}g^{4-n}(a-z)^m]$.

28) $(\sqrt{ac} + \sqrt{bc} + \sqrt{ad} + \sqrt{bd})$.

29) $(15\sqrt{am} - 20\sqrt{an} - 21\sqrt{bm} + 28\sqrt{bn})$.

30) $(6ab^3c\sqrt[3]{cm} - 10b^3c^2\sqrt[3]{dg^2m} - 15abgh\sqrt[3]{cdg} + 25bcg^2h\sqrt[3]{d^2})$.

31) $(6a^2b^2cm\sqrt{an} - 8bc^2d\sqrt{aghm} + 9a^2bd\sqrt{ghmn} - 12cd^2gh)$.

32) $(\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{21} + \sqrt{35})$.

33) $(6\sqrt[3]{20} - 4\sqrt[3]{15} - 21\sqrt[3]{28} + 14\sqrt[3]{21})$.

34) $(2 - 3\sqrt{6} - \sqrt{10} + 3\sqrt{15})$.

35) $(18 - 21\sqrt[6]{864} - 15\sqrt[3]{36} + 105\sqrt[6]{24})$.

36) $(am + bm + an + bn + cn + ap + bp + cp)$.

37) $(15abfg + 20bcfg - 15cdfg - 6ab^2h - 8b^2ch - 6bcdh + 9abde + 12bcde - 9cd^2e)$.

38) $(12\sqrt{b} - 16b\sqrt{a} - 20\sqrt{abc} - 9\sqrt{acd} + 12\sqrt{bcd} + 15c\sqrt{d} - 21\sqrt{ag} + 28\sqrt{bg} + 35\sqrt{cg})$.

39) $(9a^{2m} + 30a^mb^n + 25b^{2n})$.

40) $(8a^2 - 26ab + 15b^2)$.

41) $(9x^2 + 6bx - 35b^2)$.

42) $30a^2f^2 - 17afgh - 21g^2h^2)$.

43) $(12m^2 - 17dm - 99d^2)$.

44) $(24a^2 + 2ab - 40b^2)$.

45) $[9b^2(x-y)^{4m}+24bc(x-y)^{2m}(a-b)^{2-n}+16c^2(a-b)^{4-2n}]$.

46) $[6(a+b)^2+7(a+b)(x-z)-20(x-z)^2]$.

47) $[15x^2(a-m)^{2n}+15x(a+b)^q(a-m)^n-90(a+b)^{2q}]$.

48) $(14m^{-8}+11-15m^8)$.

49) $(15a^4d^{2n-6}g^{-4}-29-14a^{-4}d^{6-2n}g^4)$.

50) $[14m^6(c-2x)^{8m-10n}-51-54m^{-6}(c-2x)^{10n-8m}]$.

51) $(7g^6h^{-9}c^3-10g^4h^{-6}c^2+3g^2h^{-3}c)$.

52) $(-5p^9q^{-6}z^{12m}+13p^6q^{-4}z^{8m}-8p^3q^{-2}z^{4m})$.

53) $(9a^3cxm^4-15a^2c^2m^2x^4-24ac^3x^7)$.

54) $(20a^5b^5c+15a^3b^4c^3f-35ab^3c^5f^2)$.

55) $(6a-23\sqrt{ab}+20b)$.

56) $(6cm^2-29mn\sqrt{cd}+35dn^2)$.

57) $(6a^7b^2-19a^3b^2c\sqrt{ad}-36b^2c^2d)$.

58) $(12a^6b^2\sqrt[3]{c^2}-5a^3bc^2d\sqrt[3]{5c}-28c^4d^2\sqrt[3]{25})$.

59) $(15a^3b^5\sqrt{a}+2ab^2m^2q\sqrt[4]{a^3b^2fx^2}-24m^4q^2x\sqrt{f})$.

60) $(6a^2-31ab+35b^2+24ac-51bc+18c^2)$.

61) $(15m^2-23bm-28b^2+31mf+53bf-24f^2)$.

62) $(15a-11\sqrt{ab}-12b-31\sqrt{ac}-7\sqrt{bc}+10c)$.

63) $(3\sqrt[3]{b^2}-13b\sqrt[6]{b^2c^3}-10b^2c+m\sqrt[3]{bf}+29bm\sqrt[6]{c^3f^2}$
$-10m^2\sqrt[3]{f^2})$.

64) $(6a^2-19ab+15b^2+12ac-20bc)$.

65) $(12cm+32dm+21c^2+41cd-40d^2)$.

66) $(10g^2h^2-25mngh-11fg^2h-16cgh-10mnfg$
$-6f^2g^2+5cfg+15mnc+6c^2)$.

67) $(3a+4\sqrt{ac}-15c-15\sqrt{ab}+25\sqrt{bc})$.

68) $(3\sqrt[3]{4a^2}-11c\sqrt[6]{4a^2d^3}-42c^2d-12\sqrt[6]{4a^2b^3}-28c\sqrt{bd})$.

69) (a^2-b^2).

70) $(m^2n^2-p^2q^2)$.

71) $(9x^2-16z^2)$.

72) $(\frac{1}{9}a^2b^4-\frac{1}{16}c^2d^2)$.

73) $(c^{4m+2}-\frac{1}{25}d^{6q-4r})$.

74) $(9a^{2m}b^{8n-6q+4}-25a^{2p-6}g^{6n}h^{4r+8})$.

75) $(9a^2 + 40bc - 16c^2 - 25b^2)$.

76) $(4x^2 + 12fx + 9f^2 - 49z^2)$.

77) $(16a - 24\sqrt{ab} + 9b - 49c)$.

78) $(9\sqrt[3]{a^2} - 24\sqrt[6]{a^2z^3} + 16z - 9b^2x)$.

79) $(25m^2 - 9g^2 - 20mz + 12gz)$.

80) $(4z^2 - 25g^2 - 14fz - 35fg)$.

81) $(9a - 49b + 15c\sqrt{ad} + 35c\sqrt{bd})$.

82) $(-49a^2d - 25\sqrt[3]{b^2c^2} + 10\sqrt[3]{abc^2} - 14a\sqrt[6]{a^2c^2d^3})$.

83) $(a^3 + b^3)$.

84) $(a^3 - b^3)$.

85) $(8m^3 + 27n^3)$.

86) $(64m^3p^3 - 125a^3b^6)$.

87) $(a^4 - b^4)$.

88) $(a^8 - b^8)$.

89) $(a^{24m} - b^{16n})$.

90) $(a^5 + b^5)$.

91) $(a^5 - b^5)$.

92) $(a^6 - b^6)$.

93) $(a^7 + b^7)$.

94) $(a^7 - b^7)$.

IX.

Reduktionen algebraischer Brüche.

1. Vom Aufheben algebraischer Brüche.

1) Was heißt einen algebraischen Bruch aufheben?

2) Wie wird ein algebraischer Bruch aufgehoben oder abgekürzt, wenn Zähler und Nenner aus mehrern Gliedern bestehen?

3) Wie verfährt man dann, um den gemeinschaftlichen Faktor zwischen Zähler und Nenner zu bestimmen, wenn man ei-

nen gemeinschaftlichen Faktor vermuthet, aber Zähler und Nenner nicht schicklich zerlegen kann?

Aufgaben.

1) $\left(\frac{ac+bc}{bc+dc}\right)$. 2) $\left(\frac{8acd-6bcd}{6acd+4bcd}\right)$.

3) $\left(\frac{9a\sqrt{b}-21b\sqrt{a}}{6a\sqrt{ab}-9ab}\right)$. 4) $\left(\frac{30\sqrt{3}-75\sqrt{2}}{15\sqrt{2}+20\sqrt{30}}\right)$.

5) $\left(\frac{4abm-6abn}{2m^2n-3mn^2}\right)$. 6) $\left(\frac{8a\sqrt{b}-6b\sqrt{a}}{12a\sqrt{d}-9\sqrt{abd}}\right)$.

7) $\left(\frac{4m^2-8mn-21n^2}{6m^2-11mn-35n^2}\right)$.

8) $\left(\frac{6a^4b^2-10a^2bfg+18a^2bcd-30cdfg}{6a^2b\sqrt{a}-4a^2b\sqrt{b}+18cd\sqrt{a}-12cd\sqrt{b}}\right)$.

9) $\left(\frac{10m^2-29mn+21n^2+16mx-23nx+6x^2}{5m^2+3mn-14n^2+28mx-29nx+15x^2}\right)$.

10) $\left(\frac{6a-19\sqrt{ab}+15b+5\sqrt{ac}-13\sqrt{bc}-20c}{15a-19\sqrt{ab}-10b-41\sqrt{ac}+27\sqrt{bc}+28c}\right)$.

11) $\left(\frac{6a^2-2ac-20c^2+3af+5cf}{2f^2-5cf-12c^2+4af+6ac}\right)$.

12) $\left(\frac{10m^2x^2+4cmx-6c^2+6md^3x+6cd^3}{9d^6+3cd^3-12c^2+20cmx+15md^3x}\right)$.

13) $\left(\frac{45-6\sqrt{5ab}-8ab-35a\sqrt{5d}-14c\sqrt{abd}}{9\sqrt{5ab}+15c\sqrt{5d}-12ab-41c\sqrt{abd}-35c^2d}\right)$.

14) $\left(\frac{4a^2-9b^2+24bc-16c^2}{16c^2-4a^2+12ab-9b^2}\right)$.

15) $\left(\frac{n^2\sqrt[3]{g^2}-m^2n+2m\sqrt{an}+2n\sqrt[6]{a^3g^2}}{4a+4n\sqrt[6]{a^3g^2}+n^2\sqrt[3]{g^2}-m^2n}\right)$.

16) $\left(\frac{a^7-b^7}{4a^6-3a^5b-3a^4b^2-3a^3b^3-3a^2b^4-3ab^5-7b^6}\right)$.

2. Vom Gleichnamigmachen algebraischer Brüche.

1) Was heißt algebraische Brüche gleichnamig machen?

2) Wie werden die Glieder des Ausdruckes $a + \frac{b}{c} - d$ auf eine gemeinschaftliche Benennung gebracht?

3) Wie sind mehrere Brüche, deren Nenner keine gemeinschaftlichen Faktoren haben, z. B. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$, auf gleiche Benennung zu bringen?

4) Wie verfährt man bei dem Gleichnamigmachen solcher Brüche, deren Nenner gemeinschaftliche Faktoren enthalten, z. B. $\frac{a}{mn} - \frac{b}{2pn} + \frac{mp}{c}$?

Aufgaben.

1) $\left(\frac{x}{z} + y\right)$. 2) $\left(\frac{ab}{c} - d + f\right)$.

3) $\left(a^{2m}b^{-3} + \frac{a^3x^{2q+2}}{bfg}\right)$.

4) $\left(\frac{3a(m+n)^{2p}}{4cgf} - 2m(x+z)^3\right)$.

5) $\left(\frac{4a\sqrt{cd}}{3m\sqrt{mn}} + 4g\sqrt{2mn}\right)$.

6) $\left(\frac{2am}{a+b} - c\right)$.

7) $\left(\frac{3ax - 4bmx}{2x - 3z} + 2bm\right)$.

8) $\left(\frac{5m\sqrt{x} - 6a^2b\sqrt{c}}{3a\sqrt{b} - 5c\sqrt{d}} + 2a\sqrt{bc}\right)$.

9) $\left(\frac{4ghn - 2bcm}{3m - 4n} + 3gh - 4bc\right)$.

10) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$. 11) $\left(\frac{4g}{3m} - \frac{5mn}{2pq}\right)$.

12) $\left(\frac{2a + 3\sqrt{ax}}{5bc\sqrt{am}} - 3b\sqrt{nm}\right)$.

13) $\left(\frac{3gxz}{3n} - \frac{4xy}{9mn}\right).$

14) $\left(\frac{5fgh}{6m^3b^2x} - \frac{7a^2b^{3r}}{2b^2m}\right).$

15) $\left(\frac{3a + 2b}{2ab^2c} - \frac{5b + 2}{4ab^3c^4}\right).$

16) $\left(\frac{a}{bc} + \frac{d}{bf}\right).$

17) $\left(\frac{2a - 3b}{6cgh} - \frac{5c - 4b}{2ghm}\right).$

18) $\left(\frac{2m\sqrt{n} + 4c\sqrt{x}}{12mn\sqrt{nx}} - \frac{2c\sqrt{d} + 3g\sqrt{z}}{20cm\sqrt{dn}}\right).$

19) $\left(\frac{4x^2b^3 - 6c}{3a^2b^3g} - \frac{3a^{2p} - 2z}{15ab^4g^4} - 2q\right).$

20) $\left(\frac{a}{gh} + \frac{b}{ah} + \frac{d}{bh}\right).$

21) $\left(\frac{2ax}{3bqz} - \frac{3b}{4qz} - \frac{5ah}{6mqz}\right).$

22) $\left(\frac{4a + b}{7a^3b^2z} - \frac{2r + c}{14ab^2z^3} + \frac{4bq}{7a^3bmz^2}\right).$

23) $\left(\frac{2a + 7z}{2a^3b^2q} - \frac{4a^3pz^3}{3a^2b^3q^2} - \frac{1}{6a^3bq}\right).$

24) $\left(\frac{a}{b + c} + \frac{d}{g + h}\right).$

25) $\left(\frac{m - n}{m + n} - \frac{3m - 2n}{m + n}\right).$

26) $\left(\frac{3ab - 5cd + 1}{3ab + 5cd} - \frac{2cd + 3ab}{5cd - 4ab + 2}\right).$

27) $\left(\frac{3\sqrt{a} - 5\sqrt{b}}{4\sqrt{c} - 3\sqrt{d}} - \frac{2\sqrt{c} + 3\sqrt{d}}{4\sqrt{a} + 3\sqrt{b}}\right).$

28) $\left(\frac{5g - 3ah}{a - x} + \frac{4c + 3d}{g + x} - 3\right).$

29) $\left(\frac{a}{a^2-b^2}+\frac{b}{2a^2b-2b^3}\right)$.

30) $\left(\frac{am+b}{3a+2b}+\frac{c}{6a^2b+4ab^2}\right)$.

31) $\left(\frac{a+b}{bm+cm}-\frac{a-b+c}{bnx+cnx}-1\right)$.

32) $\left(\frac{a}{mn+n^2-m-n}+\frac{b}{pm+pn+mq+nq}\right)$.

33) $\left(\frac{2a+b}{10a^2-21ab+9b^2}-\frac{5a-3b}{2a^2-13ab+15b^2}\right)$.

34) $\left(\frac{3\sqrt{a}-5\sqrt{ab}+15}{9a-25b}+\frac{3\sqrt{a}-5\sqrt{b}}{4a\sqrt{b}+10b\sqrt{a}}\right)$.

X.

Logarithmen.

1. Von den Logarithmen und deren Gebrauch.

1) Was begreift man unter dem Logarithmen einer Zahl?

2) Was ist ein Logarithmensystem?

3) Wie heißt die Zahl eines Logarithmensystemes, von welcher verschiedene Potenzen gewissen Zahlen gleich sind?

4) Was heißt die Logarithmen gewisser Zahlen eines Systemes bestimmen?

5) Können die Logarithmen aller Zahlen irgend eines Systemes ganze Zahlen sein?

6) Durch welchen Namen bezeichnet man die ganzen Einheiten eines Logarithmen, und durch welchen die Bruchtheile desselben?

7) Welches ist das gebräuchlichste Logarithmensystem?

8) Welchen Vorzug gewähren die Brigg'schen Logarithmen?

9) Wie wird die Multiplikation gewisser Zahlen und wie die Division logarithmisch ausgeübt, z. B. log. abc; log. $\frac{mnz}{axy}$?

10) Wie geschieht die Erhebung zu Potenzen und wie die Extraktion der Wurzeln logarithmisch, z. B. log. a^m; log. $a^{-m}b^nc^3$; log. $\sqrt[m]{a}$; log. $\sqrt[m]{^2g^3}$; log. $\sqrt[r]{\left(\frac{a^2c^3}{m^2n}\right)}$?

11) Wie werden aus logarithmischen Ausdrücken wieder diejenigen abgeleitet, aus welchen sie entstanden sind; z. B. aus welchen Ausdrücken sind folgende entstanden: log. a + log. b — log. c; 2 log. m — 3 log. n; $\frac{m}{n}$ log. a + $\frac{m}{n}$ log. b; $\frac{p-1}{3}$ log. a + $\frac{p-1}{3}$ log. c — $\frac{5}{3}$ log. m — $\frac{m-2}{3}$ log. x?

Aufgaben.

a) Folgende Ausdrücke sind logarithmisch darzustellen.

1) log. ab.
2) log. mxz.
3) log. $(m+n)(m-5)$.
4) log. 2xz.
5) log. $ab(m+n)$.
6) log. $ax(x^2-1)$.
7) log. $\frac{a}{m}$.
8) log. $\frac{x}{z}$.
9) log. $\frac{ab}{cf}$.
10) log. $\frac{3a(x-1)}{mn}$.
11) log. $\frac{2ax(m+n)(p+q)}{(x-1)(p+q)}$.
12) log $\left(\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{z}\cdot\frac{c}{y}\right)$.
13) log. a^2.
14) log. a^3b^2x.
15) log. a^nx^pz.
16) log. $x^{n-3}p^{2q+2}$.
17) log. $(a-b)^n$.
18) log. $a^px^r(m-3)^{2q}$.
19) log. $a^{-3}b^{-2}$.
20) log. $a^{2r}m^{-r}(x-3)^{-2p}$.
21) log. $\frac{a^2}{b^2}$.
22) log. $\frac{a^3b^2x}{m^3c}$.
23) log. $a^{\frac{m}{n}}$.
24) log. $a^{\frac{2p}{3}}z^{\frac{q+r}{2}}$.

25) $\log. \sqrt{a}$. 26) $\log. \sqrt{a^3bx}$. 27) $\log. \sqrt[p]{x^m y^2 z^n}$.

28) $\log. \sqrt[p]{a^r (m+1)^q}$. 29) $\log. \sqrt[m]{\left(\frac{a^2}{b^3}\right)}$.

30) $\log. \sqrt[3]{\left(\frac{m^2}{p^r}\right)}$. 31) $\log. 2ab\sqrt[p]{a^3 b^{-2}}$.

32) $\log. \sqrt[m]{\left(\frac{a}{x}\right)} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{m^2}{n^3}\right)} \cdot \sqrt[p]{\left(\frac{x^r}{q^2}\right)}$.

33) $\log. \sqrt[-p]{a}$. 34) $\log. \sqrt[-p-2]{a^{2p+3}}$.

35) $\log. \sqrt[-3]{\frac{a^2}{c^4}}$. 36) $\log. \frac{5}{\sqrt{a}}$. 37) $\log. \frac{a}{\sqrt[p]{x^n}}$.

38) $\log. \frac{1}{\sqrt[r]{x^{m+3}z^2}}$. 39) $\log. \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}$. 40) $\log. \frac{\sqrt[p]{x^2}}{\sqrt[m]{n}}$.

41) $\log. \frac{a\sqrt[3]{b}}{a\sqrt{f}}$. 42) $\log. \frac{(a+b)\,(m+n)\,\sqrt[m]{a^2\, b}}{(m-3)^r\,(x+z)^{\frac{2}{3}}\,\sqrt[p]{xz}}$.

b) Aus den folgenden logarithmischen Ausdrücken sind wieder diejenigen zu finden, aus welchen sie entstanden sind *)

1) N. (log. 2 + log. m + log. x).

2) N. (3 log. m + 2 log. n). 3) N. (—n log. m).

4) N. (log. 5 + m log. a + (q—r) log. b).

5) N. (3 log. (2m—1) + (p—1) log. (m+n).

6) N. (log. a — log. b).

---

*) Um anzudeuten, daß von irgend einem logarithmisch dargestellten Ausdrucke wieder der gefunden werden soll, aus welchem er entstanden ist, setzt man vor demselben N. (numerus).

7) $N.\,(\log.3 + \log.a + \log.b - \log.2 - \log.c - \log.d)$.

8) $N.\,(\log.4 + 3\log.a + 2\log.b + \log.c - \log.2 + 3\log.m + 2\log.n)$.

9) $N.\,(\frac{m}{n}\log.a)$.

10) $N.\,(\frac{3}{2r}\log.a)$.

11) $N.\,(\frac{2}{p}\log.a + \frac{3}{p}\log.b - \frac{2}{p}\log.c - \frac{3}{p}\log.d)$.

12) $N.\,(\frac{3}{2r-3}\log.m + \frac{m}{2r-3}\log.x - \log.3 - \frac{4}{2r-3}\log(m-1))$.

13) $N.\,(\frac{n+3}{mn}\log.a - \frac{n+2}{mn}\log.b)$.

14) $N.\,(\frac{1}{m}\log.a + \frac{1}{n}\log.b + \frac{1}{c}\log.c)$.

15) $N.\,(\frac{1}{2}\log.a - \frac{1}{m}\log.b + \frac{1}{3}\log.a - \frac{2}{3}\log.d + \frac{3}{4}\log.g - \frac{1}{4}\log.n)$.

16) $N.\,(-\log.a - \log.b)$.

17) $N.\,(-m\log.a - n\log.b)$.

18) $N.\,(-\frac{3}{2}\log.a - \frac{n}{2}\log.b)$.

19) $N.\,(-\frac{1}{3}\log.a - \frac{1}{3}\log.b - \frac{1}{6}\log.c - \frac{1}{6}\log.d)$.

20) $N.\,(-\log.3 - 2\log.m - \frac{1}{2}\log a - \frac{1}{4}\log.c)$.

2. Vom praktischen Gebrauch der Brigg'schen Logarithmen *).

1) Wie bestimmt man die Charakteristik oder den Index des Logarithmen irgend einer ganzen Zahl?

2) Wie findet man in den Vega'schen Tafeln den Logarithmen einer fünfstelligen Zahl?

3) Was hat man dann zu thun, wenn die zur fünften Zahlstelle einer Zahl gehörenden Mantissen ein Sternchen haben?

---

*) Die hier zum Grunde gelegten Brigg'schen Logarithmentafeln sind die von Vega, betitelt: logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, 1ter Band.

4) In wiefern unterscheiden sich die Logarithmen der Zahlen 5, 50, 500, 5000 ... von einander?

5) Welche Regel läßt sich also für das Aufsuchen der Logarithmen solcher ganzen Zahlen aufstellen, die zur Rechten eine oder mehre Nullen haben?

6) Wie findet man log. $11 \times 19 \times 19)$?

7) Wie bestimmt man den Logarithmen eines gemeinen Bruches, z. E. log. ($\frac{15}{8} = 15:8$); log. $18\frac{2}{3}$?

8) Wie kann der Logarithmen eines Dezimalbruches gefunden werden, z. B. log. 171,53; log. 0,767; log. 0,000216?

9) Wie wird der Logarithmen der Potenz einer Zahl erhalten, z. B. log. 7^5; log. $(\frac{852}{119})^5$; log. $57^{0,021}$?

10) Wenn der Logarithmen einer, zu irgend einer Potenz zu erhebenden Zahl, eine negative Charakteristik erhält; was muß hier geschehen, z. B. log. $(\frac{1}{127})^5$; log. $0,00097^{0,05}$?

11) Wie bestimmt man den Logarithmen der Wurzel einer Zahl, z. B. log. $\sqrt[3]{54}$; log. $\sqrt[7]{\frac{15}{32}}$?

12) Wie findet man nach den Vega'schen Tafeln die Logarithmen von sechs- und mehrstelligen Zahlen?

13) Wie können aber auch die Logarithmen von sechs- und mehrstelligen Zahlen ohne Proportionaltheile gefunden werden?

14) Wie kann man den Logarithmen eines periodischen Dezimalbruches bestimmen?

15) Wie findet man in den Vega'schen Tafeln die einem Logarithmen entsprechende Zahl?

16) Wie ist auch die einem Logarithmen entsprechende Zahl ohne Proportionaltheile zu bestimmen?

17) Was bestimmt die positive und was die negative Charakteristik eines Logarithmen, wenn die denselben entsprechende Zahl gesucht wird?

18) Wie werden die Ausdrücke: $(5 \times 18 \times 35)$; $\sqrt[3]{37}$; $\sqrt[5]{\frac{17}{32}}$; $\sqrt{(4\sqrt[3]{11})}$; $\sqrt{\left(\frac{5\sqrt[3]{2}}{8\sqrt{5}}\right)}$ logarithmisch ausgeführt?

19) Wie werden die Zahlenausdrücke von der Form: $(\sqrt{7} - 3\sqrt[4]{2} + 8\sqrt[3]{13})$; $\sqrt[3]{(5\sqrt{3} - 8\sqrt{7} - 22\sqrt[3]{4})}$ logarithmisch entwickelt?

Aufgaben.

a) Von nachstehenden Zahlen sind die Logarithmen aufzusuchen.

1) log. 8. 2) log. 21. 3) log. 217.

4) log. 519. 5) log. 3895. 6) log. 5874.

7) log. 9001. 8) log. 6703. 9) log. 4060.

10) log. 6700. 11) log. 6001. 12) log. 37521.

13) log. 67012. 14) log. 10052. 15) log. 30607.

16) log. 67059. 17) log. 30000. 18) log. 170000.

19) log. 57040000. 20) log. 38752000. 21) *log. 12765.

22) log. 12978. 23) log. 24839. 24) log. 27866.

25) log. 35978. 26) log. 387260. 27) log. 4677700.

28) log. 56624000. 29) log. 77447000. 30) log. 77092000.

b) Von nachfolgenden Zahlenausdrücken sind die Logarithmen des Endresultates zu finden.

1) log. (17×17). 2) log. (317×519).

3) log. (375×8439). 4) log. (2730×68432).

5) log. (50001×80032). 6) log. (17×37×711).

7) log. (573×693×4001).

8) log. (5374×694070×6700300).

9) log. (687 : 243). 10) log. (5432 : 536).

11) log. $\frac{6}{5}$. 12) log. $\frac{15}{17}$. 13) log. $\frac{318}{11}$.

14) log. $\frac{5407}{5311}$. 15) log. $\frac{67543}{59782}$. 16) log. $\frac{75}{74}$.

17) log. $5\frac{3}{4}$. 18) log. $8\frac{17}{19}$. 19) log. $471\frac{25}{33}$.

20) log. $\frac{3}{4}$. 21) log. $\frac{15}{16}$. 22) log. $\frac{7}{11}$.

23) log. $\frac{35}{39}$. 24) log. $\frac{8}{4793}$. 25) log. $\frac{1}{31}$.

26) log. $\frac{1}{49731}$. 27) log. 15,75. 28) log. 318,54.

29) log. 457,32. 30) log. 6,7549. 31) log. 4,372.
32) log. 3,207. 33) log. 9,0007. 34) log. 0,984.
35) log. 0,3752. 36) log. 0,30072. 37) log. 0,0173.
38) log. 0,03967. 39) log. 0,00267.
40) log. 0,00002439. 41) log. 0,000069825.
42) log. 5^3. 43) log. 17^2. 44) log. 374^3.
45) log. 553^{12}. 46) log. $(\frac{31}{4})^3$. 47) log. $(\frac{18}{5})^4$.
48) log. $(\frac{39741}{567})^8$. 49) log. $(\frac{3}{5})^2$. 50) log. $(\frac{17}{19})^3$.
51) log. $(\frac{173}{284})^5$. 52) log. $(\frac{2}{1753})^4$. 53) log. $(\frac{1}{5743})^6$.
54) log. $(0,398))^4$. 55) log. $(0,0982)^7$.
56) log. $(0,0375)^{13}$. 57) log. $(0,000752)^{21}$.
58) log. $(17^{3,2}$. 59) log. $375^{6,5}$. 60) log. $7734^{0,37}$.
61) log. $(35,32^{0,52}$. 62) log. $1,3742^{1,34}$.
63) log. $(0,375^{3,5}$. 64) log. $0,0387^{3,14}$.
65) log. $0,00975^{0,71}$. 66) log. $0,000782^{0,0175}$.
67) log. $(\frac{6}{5})^{6,5}$. 68) log. $(\frac{3}{4})^{3,4}$. 69) log. $(\frac{7}{11})^{0,03}$.
70) log. $(\frac{121}{273})^{0,37}$. 71) log. $(\frac{1}{97276})^{0,0031}$.
72) log. $\sqrt{67}$. 73) log. $\sqrt{543}$.
74) log. $\sqrt[3]{87}$. 75) log. $\sqrt[4]{673}$. 76) log. $\sqrt[5]{67831}$.
77) log. $\sqrt[7]{387}$. 78) log. $\sqrt[14]{3875}$. 79) log. $\sqrt[3]{16,75}$.
80) log. $\sqrt[5]{83,67}$. 81) log. $\sqrt[3]{1,3679}$.
82) log. $\sqrt[5]{0,1324}$. 83) log. $\sqrt[5]{0,007542}$.
84) log. $\sqrt[5]{0,006321}$. 85) log. $\sqrt[7]{0,0003162}$.
86) log. $\sqrt[3]{(\frac{13}{5})}$. 87) log. $\sqrt[4]{(\frac{7}{3})}$. 88) log. $\sqrt[5]{(1\frac{4}{5})}$.
89) log. $\sqrt[6]{(13\frac{1}{5})}$. 90) log. $\sqrt{(\frac{3}{5})}$. 91) log. $\sqrt[3]{(\frac{6}{17})}$.
92) log. $\sqrt[4]{(\frac{7}{19})}$. 93) log. $\sqrt[7]{\frac{181}{371})}$. 94) log. $\sqrt[5]{(\frac{1}{673})}$.
95) log. $\sqrt[3]{(\frac{1}{37521})}$.

c) Bestimmung der Logarithmen solcher Zahlen, welche die Grenze der Tafeln überschreiten.

1) log. 358426. 2) log. 543218. 3) log. 121304.
4) log. 3714631. 5) log. 5784398. 6) log. 1139842.
7) log. 6785003. 8) log. 16135009.
9) log. 675243897. 10) log. 150670057.
11) log. 375,432. 12) log. 680,772.
13) log. 69,43602. 14) log. 5,694314.
15) log. 0,387546. 16) log. 0,0975243.
17) log. 0,0038069752. 18) log. 8,00075231426.
19) log. $\frac{60752431}{524315}$. 20) log. $\frac{26754}{89708073}$.
21) log. 3,5757... 22) log. 0,00375375...
23) log. 0,35763763... 24) log. 8,32737543754...

d) Zu gegebenen Logarithmen die denselben entsprechenden Zahlen zu finden.

α) Bestimmung der Zahlen solcher Logarithmen, welche genau in den Tafeln enthalten sind.

1) N. log. 2,5728716. 2) N. log. 2,7497363.
3) N. log. 2,9527924. 4) N. log. 2,9912261.
5) N. log. 3,7349598. 6) N. log. 3,4320067.
7) N. log. 3,6726519. 8) N. log. 3,7595923.
9) N. log. 3,609544. 10) N. log. 3,9822712.
11) N. log. 4,1318111. 12) N. log. 4,9890981.
13) N. log. 4,9999088. 14) N. log. 7,7786793.
15) N. log. 7,8751134. 16) N. log. 0,5686944.
17) N. log. 0,9867896. 18) N. log. 0,9578466—1.
19) N. log. 0,5140029. 20) N. log. 0,5132176—2.
21) N. log. 0,9886481—3. 22) N. log. 0,8762409—4.
23) N. log. 0,9546236—5. 24) N. log. 0,7550196—6.

β) Bestimmung der Zahlen solcher Logarithmen, welche nicht genau in den Tafeln enthalten sind.

1) N. log. 2,5436721. 2) N. log. 2,3069432.

3) N. log. 3,6970032. 4) N. log. 3,0007564.
5) N. log. 4,3075247. 6) N. log. 5,6000732.
7) N. log. 5,0732637. 8) N. log. 6,5432503.
9) N. log. 6,0345670. 10) N. log. 7,9800098.
11) N. log. 0,3754068. 12) N. log. 0,0073269.
13) N. log. 0,9874532—1. 14) N. log. 0,3256940—1.
15) N. log. 0,0075409—2. 16) N. log. 0,0752462—2.
17) N. log. 0,9875003—3. 18) N. log. 0,6075432—3.
19) N. log. 0,8752983—4. 20) N. log. 0,9998979—5.

e) Die nachstehenden Zahlenausdrücke sind mittelst Logarithmen zu entwickeln.

1) $(5 \times 13 \times 71 \times 73)$. 2) $(0{,}754 \times 743 \times 0{,}6734)$.

3) $\dfrac{3{,}75 \times 75{,}475 \times 0{,}0236}{375 \times 37 \times 54}$. 4) $\sqrt{17}$. 5) $\sqrt{3752}$.

6) $\sqrt[3]{6752}$. 7) $\sqrt[5]{37524}$. 8) $\sqrt[8]{37524}$. 9) $\sqrt{9{,}752}$.

10) $\sqrt[3]{6{,}743}$. 11) $\sqrt[4]{37{,}4321}$. 12) $\sqrt[6]{6{,}30075}$.

13) $7\sqrt[10]{3{,}6752437}$. 14) $8{,}3\sqrt[12]{10{,}275275\ldots}$.

15) $\sqrt{0{,}05721}$. 16) $\sqrt[3]{0{,}0057243}$.

17) $\sqrt[4]{0{,}000694321}$. 18) $\sqrt{0{,}3965}$.

19) $\sqrt[3]{0{,}0794324}$. 20) $\sqrt[6]{0{,}073285}$.

21) $\sqrt{(\tfrac{18}{5})}$. 22) $\sqrt[3]{(\tfrac{173}{28})}$. 23) $\sqrt[4]{504\tfrac{67}{524}}$.

24) $\sqrt{(\tfrac{3}{5})}$. 25) $\sqrt{(\tfrac{7}{15})}$. 26) $\sqrt[5]{(\tfrac{18}{73})}$.

27) $\sqrt[6]{\left(\dfrac{5}{3742}\right)}$. 28) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{5743}\right)}$. 29) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{9{,}5467}{13{,}2431}\right)}$.

30) $\sqrt[5]{\left(\dfrac{0{,}74367}{5{,}7698}\right)}$. 31) $\sqrt{(15\sqrt{3})}$. 32) $\sqrt[3]{(18\sqrt{41})}$.

33) $\sqrt[5]{(471\sqrt[3]{67})}$. 34) $\sqrt[3]{[542\sqrt[3]{(675\sqrt[3]{3})}]}$.

35) $\sqrt[6]{[843\sqrt{(672\sqrt[3]{37})}]}$.   36) $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt[3]{24}}$.

37) $\dfrac{\sqrt[3]{675}}{\sqrt{4752}}$.   38) $\dfrac{\sqrt{(673\sqrt{421})}}{\sqrt[3]{(574\sqrt{321})}}$.

39) $\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{4}}\right)}$.   40) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt[3]{675}}{\sqrt[4]{521}}\right)}$.

41) $\sqrt[6]{\left(\dfrac{3\sqrt{54}}{4\sqrt[5]{6732}}\right)}$.   42) $\sqrt[5]{574}\cdot\sqrt{372}$.

43) $\sqrt[6]{0{,}7524}\cdot\sqrt[3]{5{,}673}$.   44) $\sqrt[7]{0{,}0752}\cdot\sqrt[5]{0{,}6732}$.

45) $\sqrt[3]{(67\cdot\sqrt{3{,}75})}\cdot\sqrt[4]{(3\sqrt[3]{67})}$.

46) $\sqrt[6]{(743\sqrt{24{,}573})}\cdot\sqrt{(675\sqrt[3]{0{,}0752})}$.

47) $\sqrt{\left(\dfrac{3{,}75\sqrt[3]{5{,}24}}{\sqrt[3]{0{,}574}\cdot\sqrt{0{,}736}}\right)}$.

48) $\sqrt[5]{\left[\dfrac{(37{,}502\sqrt[3]{(0{,}075\sqrt{0{,}603})})}{\sqrt[3]{(574\sqrt{0{,}752})}\cdot\sqrt{(6{,}732\sqrt[3]{542})}}\right]}$.

49) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{2{,}54\sqrt[3]{543}}{574\times 0{,}75}\right)}\times\sqrt[5]{\left[\dfrac{67{,}24\sqrt[3]{6{,}73}\cdot\sqrt{0{,}00367}}{207{,}36\sqrt{(5{,}243\sqrt[3]{4{,}675})}}\right]}$.

50) $(375)^3$.   51) $(3{,}675)^4$.

52) $(0{,}07524)^7$.   53) $(\tfrac{1}{5}\tfrac{7}{4}\tfrac{1}{3})^5$.

54) $({}_{4}\tfrac{2}{7}\tfrac{7}{5}\tfrac{0}{2}{}_{3})^8$.   55) $(57)^{0,3}$.

56) $(0{,}075324)^{6,752}$.   57) $(\tfrac{1}{3}\tfrac{7}{7}\tfrac{5}{6})^{3,51}$.

58) $({}_{3}\tfrac{1}{6}\tfrac{3}{7}\tfrac{1}{5}{}_{2})^{0,075}$.   59) $\sqrt{372^3}$.

60) $\sqrt[3]{2736^2}$.   61) $\sqrt[5]{545^3\cdot 673^2}$.

62) $\sqrt[7]{0{,}6032^5\cdot 0{,}387^{0,32}}$.

63) $\sqrt[5]{\left(\frac{3{,}752^{0{,}15}}{4{,}213^2}\right)} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{0{,}652^5 \cdot \sqrt{24^3}}{\sqrt[3]{543^3} \cdot 7{,}03^2}\right)}$.

64) $(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})$.

65) $(3\sqrt{11}-4\sqrt{8}+15\sqrt{5})$.

66) $\sqrt[3]{(3+15\sqrt{11}-6\sqrt{7})}$.

67) $\sqrt[5]{\left(3\sqrt{\tfrac{5}{7}}+\frac{5\sqrt[3]{5}}{2\sqrt{6}}-\frac{\sqrt[5]{8}}{4\sqrt{7}}\right)}$.

Zweiter Abschnitt.

Algebra
oder
die Lehre von den Gleichungen.

Von den Gleichungen im Allgemeinen.

1) Was ist eine Gleichung?
2) Aus wieviel Theilen besteht eine Gleichung?
3) Welches sind die zwei wesentlich von einander verschiedenen Arten von Gleichungen?
4) Wie ist eine analytische Gleichung beschaffen?
5) Ist es nothwendig, daß eine analytische Gleichung unbekannte Größen enthalte, und kann durch eine analytische Gleichung der Werth der in ihr enthaltenen unbekannten Größe bestimmt werden?
6) Was ist eine algebraische Gleichung?
7) Wie theilt man die Gleichungen rücksichtlich der Zahl ihrer unbekannten Größen ein?
8) Wie hinsichtlich der Potenzen, in welchen die unbekannte Größe vorhanden ist?
9) Was bestimmt der Grad einer Gleichung?
10) Welches ist der Grad einer Gleichung mit einer unbekannten Größe?
11) Wie findet man den Grad einer Gleichung, in der mehre unbekannte Größen durch Multiplikation verbunden vorkommen?

12) Von welchem Grade sind die Gleichungen: $ax + bx = c$; $ax^2 + bx = d + gx$; $ax^3 + bx^4 = 5c^2x - 2dx^3$; $a + bx + x^n = dx^{n-1}$; $(xy = m;\ x + y)$; $(ax + cy^2x = d + x;\ mxy - cx = d + gx)$; $(x^ny^m - ax^{n-3} = c;\ x + 3m = xy^2)$?

13) Was versteht man unter bestimmten Gleichungen oder bestimmten Aufgaben?

14) Was unter unbestimmten Gleichungen oder diophantischen Aufgaben?

15) Wenn sind Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen bestimmt?

16) Und wenn sind Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen unbestimmt?

XI.

Gleichungen des ersten Grades.

1. Mit einer unbekannten Größe.

1) Wie kann die unbekannte Größe einer Gleichung mit bekannten verbunden sein?

2) Wie bestimmt man den Werth der unbekannten Größe, wenn sie mit bekannten Größen durch Addition verbunden vorkommt, wie z. B. in: $m + n + x = g + 2m + h$?

3) Welches Vorzeichen muß die unbekannte Größe haben, wenn sie nur einen Theil der Gleichung ausmacht, und was muß dann geschehen, wenn sie negativ ist?

4) Was wird mit dem Koeffizienten, den die unbekannte Größe ursprüglich hat oder durch Addition erhielt, vorgenommen, wenn derselbe zu 1 werden soll?

5) Wie verfährt man, um den Werth der unbekannten Größe zu bestimmen, wenn sie in mehrern Gliedern mit bekannten Größen verbunden vorkommt, wie z. B. $mx + px - g = n - c + fx - 2px$?

6) Wie ist der Werth der unbekannten Größe zu entwickeln, wenn sie in mehrern Gliedern vorhanden und da durch

Multiplikation oder Division mit bekannten Größen verbunden ist, wie in: $3a + \frac{2mx}{c} - \frac{5x}{m} = m - \frac{2cmx}{ab}$?

7) Was ist dann zu thun, wenn die unbekannte Größe als Nenner vorhanden ist, um ihren Werth zu bestimmen?

8) Wie geschieht die Reduktion einer Gleichung, wenn die unbekannte Größe unter einem Radikalzeichen erscheint?

Aufgaben.

a) Angesetzte Aufgaben zur Reduktion.

1) $(a + x = b + c)$.

2) $(2m - 3c = 3h - 3m + x)$.

3) $(6m + 2mn - 3b = 3f - 2g - 3b + x)$.

4) $(4\frac{1}{3}b - 3c + 2a = -6f - 2\frac{2}{3}b + 3a + x)$.

5) $(6 - 3a - 2\frac{1}{3}m + x = 5\frac{1}{4} + a - 6\frac{2}{3}m - n)$.

6) $(2m - x + 3g = 5m - 7 + g)$.

7) $(3\frac{2}{5}a - 4c - x = 6\frac{1}{5}a + 3c - 7\frac{4}{5})$.

8) $(2b - 5g - 2a^2b = 3a^2b - 5g + 2b - x)$.

9) $(3x - 7 + 4x = 8{,}75 + 5x - 17 + 2x)$.

10) $(3m - 5\frac{1}{4}x - 14n + 7a^3b^2 - 1\frac{1}{8}x = -3m + a^3b^2$
$+ 2\frac{5}{8}x - 5m)$.

11) $(6am + 5gmx - 3gm + 10m^2 - 2\frac{2}{3}gmx - 3x =$
$2\frac{1}{3}gmx + 9ag + 12gm)$.

12) $(8m^2 + 5m - 6\frac{3}{5} - 6\frac{3}{5}x = 5m + 15x + 11{,}4 - 7\frac{3}{5}x)$.

13) $(\frac{2}{3}x - 4\frac{3}{7} = \frac{5x}{4} + 11\frac{3}{7})$.

14) $(5\frac{1}{4}x - 3{,}23455 - 2x = 37{,}3842 - 6\frac{7}{8}x - 6{,}7)$.

15) $(2{,}37x + 3{,}29 - 4\frac{1}{6}x - 0{,}611 = \frac{13}{15}x + \frac{5}{3}x - 4\frac{2}{3}x +$
$1{,}14165)$.

16) $(3mx - 2ac = 5x - 4nx)$.

17) $(5gz + 5af + 3mz + rz = 0)$.

18) $(3hy - 3a - 2my = -5b - 3cy)$.

19) $[3ax\,(b + c) - 4m\,(a + c) = 3mx\,(m + n) -$
$2cx\,(g - a)]$.

20) $\left(\frac{m}{x} + \frac{n}{x} = c\right)$.

58) $$\left(\frac{2x-4}{2\sqrt[3]{9}-\sqrt[6]{3087}+70}+\frac{4x-7}{3\sqrt[6]{3087}-2\sqrt[3]{9}+140}=\frac{3x-1}{56+2\sqrt[6]{3087}-\sqrt[3]{9}}\right).$$

59) $$\left(\frac{6ax-3bc-4bx+4\frac{1}{2}ac}{9a^2-12ab+15acx^3+4b^2-10bcx^3}=-\frac{4cx^4+3c^2x^3}{12a^2+13ab+14acx^3-14b^2+39bcx^3-10c^2x^6}\right).$$

60) $(3\sqrt{ab}-5\sqrt{bc}+3\sqrt{ax}=2\sqrt{ac}-3\sqrt{cx}+3\sqrt{bx})$.

61) $[\sqrt[4]{(2ab+c^2x^2)}=\sqrt{(2a+3b-cx)}]$.

62) $[\sqrt[6]{(27c^3x^3+54a^2bc^2x^2+3bcx)}+\sqrt{(2a^2b+3cx)}=0]$.

b) Anwendung der Reduktion der Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe auf die Auflösung allgemeiner und besonderer Aufgaben.

1) Die Summe von zwei gleich großen Zahlen ist a; wie groß ist jede derselben?

2) Die Summe zweier Zahlen, von denen die eine um b größer als die andere ist, beträgt a; welches sind diese Zahlen?

3) Die Summe zweier Zahlen ist 49 und die eine um 3 größer als die andere; welche Zahlen sind dies?

4) Die Zahl a soll in drei solche Theile zerlegt werden, daß der zweite um b und der dritte um c größer als der erste sei; welche Theile sind es?

5) Es sollen 1651 Gulden unter vier Personen so getheilt werden, daß der zweite 41, der dritte 53 und der vierte 57 Gulden mehr als der erste erhalte; welches ist der Antheil eines jeden?

6) Die Zahl a ist in vier solche Addenden zu zerlegen, daß jeder folgende um b größer als der vorhergehende wird; welches sind die Ausdrücke für diese Addenden?

7) 2520 Thaler sollen unter vier Personen so vertheilt werden,

daß jeder Folgende 50 Thlr. mehr als der Vorhergehende erhalte; was bekommt jeder?

8) Es sind drei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, daß die zweite um die Hälfte größer als die erste, die dritte um den dritten Theil größer als die zweite und daß ihre Summe a sei; welches sind die Ausdrücke für diese Zahlen?

9) Die Differenz zweier Zahlen, von welchen die kleinere b ist, beträgt d; welches ist die größere Zahl?

10) Die Differenz zweier Zahlen ist d; welches ist die kleinere, wenn die größere a ist?

11) Die Differenz zweier Zahlen ist d und eine derselben a; welches ist der Ausdruck für die andere?

12) Die Differenz zweier Zahlen ist 81 und eine derselben 125; welches kann die andere sein?

13) Die Summe zweier Zahlen ist a und ihre Differenz d; welches sind die Formeln für diese zwei Zahlen?

14) Die Summe zweier Zahlen ist 110 und ihre Differenz 36; welche Zahlen sind es?

15) Unter zwei Personen sollen 5038 Thaler so getheilt werden, daß wenn der Antheil des A. von dem des B. weggenommen wird, der Unterschied 2492 Thaler beträgt; was erhält jeder?

16) Das mfache und nfache einer Zahl addirt, gibt die Summe a; welche Zahl ist es?

17) Welches ist die Zahl, deren Drei- und Vierfaches addirt, 203 gibt?

18) Wird das nfache einer Zahl von ihrem mfachen abgezogen, so erhält man d als Differenz; welche Zahl ist es?

19) Die Differenz aus dem Sechs- und Zehnfachen einer Zahl beträgt 56; welche Zahl ist dies?

20) Die Zahl a soll in zwei solche Addenden zerlegt werden, daß das mfache des einen, gleich sei dem nfachen des andern; welches sind diese Theile?

21) Eine Zahl a ist in zwei solche Theile zu zerlegen, daß wenn man den einen mit m, den andern aber mit n multiplizirt, die Summe dieser Produkte b sei; in welche Theile muß die Zahl zerlegt werden?

22) Zwischen zwei Zahlen findet die Differenz d statt, und multiplizirt man eine dieser Zahlen mit m, so ist die Differenz

21) $\left(\frac{c}{x}+\frac{d}{x}=m+n-\frac{a}{x}\right)$.

22) $\left(\frac{a}{b+x}=\frac{c}{d+x}\right)$.

23) $\left(\frac{a+b-c}{2m-n+x}=\frac{c+b-2a}{4n-2x}\right)$.

24) $\left(\frac{a}{mx}-\frac{b}{nx}+\frac{c}{px}=\frac{3ac}{gx}-1\right)$.

25) $(a+b=\sqrt{(c+x)})$.

26) $(2a^3b-3c=\sqrt{(4c^2-3ax)})$.

27) $(2m-\sqrt{(3x-2c)}=4ab-2g)$.

28) $(4ab=m-2f\sqrt{(2m-abx)})$.

29) $\left(\frac{3m-2a}{\sqrt{(ax-3bx+c)}}=2m\right)$.

30) $(2a^3z+d^2-fz=4c-4c^2dz-2p)$.

31) $(2abnz+3cm=2abm+3cnz)$.

32) $(mx+n^2=m^2-nx)$.

33) $(4a^2x-2a=9b^2y-3b)$.

34) $(6cf+3c^2dx-9cg=12f^2g-4cdf^2x-8f^3)$.

35) $(a^2x+b^2x-a^3=-b^3-2abx)$.

36) $(a^2y-b^2y+b^3-a^3=0)$.

37) $(a^6-a^2b^2z-b^6=a^4z+b^4z)$.

38) $(n^6y+m^4+m^2n^2=m^6y-n^4)$.

39) $(5a^{2m}+21a^2b^2y-21a^2b^2=8a^{m+1}b+6a^{m+1}by+$
$15a^{2m}y)$.

40) $(15a^{2m}bfg-35a^{4m}b^2x-21a^{4m}b^2-4f^2g^2x=$
$24a^{2m}bfgx-6g^2f^2)$.

41) $(2mx\sqrt{a}+2ab^2x+6bfm+2mx\sqrt{b}+4b^2m=bx\sqrt{b}$
$+6afm+bx\sqrt{a}+2b^3+4abmx-3abf+3b^2f)$.

42) $(4a^4z-3a^2b^2z+b^4=3a^3bz+7b^4z+a^4+$
$3ab^3z)$.

43) $(2ax + 14ac - 12c^2 + 5bx = 4a^2 + 3cx + 15b^2 + 16ab - 29bc)$.

44) $(12cm + 5cmz + dmz - 6dm - 20cdz = 20c^2 + 2m^2z - 4m^2 - 25c^2z - 12cd - 3d^2z)$.

45) $(6y\sqrt{6} + 10\sqrt{6} = 45y + 8)$.

46) $(24x + 14\sqrt[3]{6} = 8\sqrt[6]{486} + 14x\sqrt[6]{54})$.

47) $(2z\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 9\sqrt{2} = \sqrt{10} - 9z\sqrt{2} + 3\sqrt{15})$.

48) $[2(2a^6 - x) - 5c^3(5c - 4x) = 4x(5c^3 + 1)]$.

49) $5m[m(2 + 3a^2) + 5a] - 3a^2(2x - 7) = 3a[a(5m^2 - x) - m] - x(3a^2 - 1)$.

50) $(2m - 5n)(3ax - 2b) = (3ab - 2c)(3x - 7ab)$.

51) $\left(\frac{3m - 5n}{a - b} = a^3x + b^3x + ab^2x + a^2bx\right)$.

52) $\left(\frac{2bx - 7b}{2x - 5b} - \frac{b - 3a^2x}{3x + 8b} = a^2 + b\right)$.

53) $\left(\frac{7b}{14x + 8ab} - \frac{2a - 3b}{3ab - 2x} = \frac{3a - 3b}{3x - 7ab}\right)$.

54) $\left(\frac{m + 5}{3x^3 - 7m} - \frac{4mx - 6m^2}{3m - 2x} = 2m\right)$.

55) $\left(\frac{2am - 3ax}{8ax^3 - 28a^2 - 2x^4 + 7ax} = \frac{3a - 5m}{6abx^3 - 21a^2b} + \frac{4m}{2x^3 - 7a}\right)$.

56) $\left(\frac{3 - x}{8a^2 - 2ab - 15b^2} + \frac{7 - 3x}{8a^2 + 6ab - 5b^2} - \frac{x + 3}{4a^2 - 8ab + 3b^2} + \frac{7 - 2x}{8a^2 + 14ab + 5b^2} = 0\right)$.

57) $\left(\frac{x - m}{4m - 11\sqrt{mn} + 7n} + \frac{4x + 3m}{16m - 40\sqrt{mn} + 21n} + \frac{2x - 5n}{4\sqrt{m} - 7\sqrt{n}} = \frac{3x + 2n}{4m - 7\sqrt{mn} + 3n}\right)$.

zwischen diesem Produkte und der andern Zahl δ. Welches sind die Ausdrücke für diese Zahlen?

23) Zwei Zahlen, deren Differenz d ist, geben, wenn die eine mit m, die andere mit n multiplizirt wird, a als Aggregat; welches sind diese Zahlen?

24) Es sollen drei Zahlen von solcher Beschaffenheit gefunden werden, daß die zweite mmal, die dritte aber nmal so groß als die erste und ihre Summe gleich a sei; welches sind diese Zahlen?

25) Die Zahl a ist in vier solche Aggreganden zu zerlegen, daß der zweite mmal so groß als der erste, der dritte nmal so groß als der zweite, und der vierte pmal so groß als der dritte sei; welches sind diese Aggreganden?

26) Es sind vier Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß die zweite 4mal so groß als die erste, die dritte 7mal so groß als die zweite und die vierte 11mal so groß als die dritte, und ihre Summe 11935 sei; welches sind diese Zahlen?

27) Wird eine gewisse Zahl durch m dividirt, so erhält man den Quotienten a; welches ist diese Zahl?

28) Wenn man das erste Mal eine Zahl durch m und das zweite Mal durch n dividirt, so gibt die Summe der Quotienten die Zahl a; welches ist diese Zahl?

29) Wenn eine gewisse Zahl sowohl durch m als durch n dividirt wird, so gibt die Differenz der Quotienten die Zahl d; welches ist diese Zahl, wenn erstens m größer als n und zweitens m kleiner als n ist?

30) Die Differenz zweier Zahlen ist d, und dividirt man die größere durch m und die kleinere durch n, so ist die Summe dieser Quotienten gleich a; welches sind diese Zahlen?

31) Von vier Zahlen ist jede folgende um b größer als die vorhergehende, und dividirt man die erste durch m, die zweite durch n, die dritte durch p und die vierte durch q, so ist die Summe dieser Quotienten gleich a; welches sind diese Zahlen?

32) Es sind drei Zahlen zu finden, wo die zweite bmal so groß als die erste, die dritte cmal so groß als die zweite, und daß, wenn diese Zahlen auf einander folgend durch m, n,

p dividirt werden, die Summe der Quotienten der Zahl a gleich sein soll; welches sind diese Zahlen?

33) Ich kenne eine Zahl von solcher Beschaffenheit, daß wenn von derselben 7 weggenommen, der Rest durch 5 dividirt und zum Quotienten 3 addirt wird, der vierte Theil dieser Summe 17 beträgt; welches ist diese Zahl?

34) Wird vom Dreifachen einer gewissen Zahl 5 abgezogen, der Rest durch 4 dividirt, vom Quotienten 7 weggenommen und diese Differenz wieder durch 7 dividirt, so ist dieser Quotient um $12\frac{1}{14}$ kleiner als die angenommene Zahl; welche Zahl wurde angenommen?

35) Nimmt man von einer gewissen Zahl den mten Theil und noch a Einheiten, vom Reste den nten Theil und noch b Einheiten, von diesem Reste wieder den pten Theil und noch c Einheiten weg, so beträgt der letzte Rest r; welche ist die gewisse Zahl?

36) Welche Zahl muß zum Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ addirt werden, damit derselbe zu $\frac{c}{d}$ werde?

37) Wenn man zum Zähler und Nenner des Bruches $\frac{3}{5}$ eine gewisse Zahl addirt, so wird derselbe zu $\frac{5}{6}$; welche Zahl ist es?

38) Welche Zahl muß vom Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ subtrahirt werden, wenn derselbe zu $\frac{c}{d}$ werden soll?

39) Welche Zahl ist es, die vom Zähler des Bruches $\frac{a}{b}$ abgezogen und zum Nenner addirt diesen Bruch in $\frac{c}{d}$ verwandelt?

40) Wenn zum Zähler des Bruches $\frac{a}{b}$ eine gewisse Zahl addirt und der um m größere Nenner mit der um n größern gewissen Zahl multiplizirt wird, so verwandelt sich der gegebene Bruch in $\frac{c}{d}$; welches ist der Ausdruck für diese Zahl?

41) Mit welcher Zahl sind die Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ zu multipliziren, wenn die Summe der erhaltenen Produkte der Zahl m gleich sein soll?

42) Zwei Zahlen a und b stehen in dem Verhältnisse m : n; welche Zahl muß noch zur ersten addirt und von der letztern abgezogen werden, wenn sie in dem Verhältnisse p : q stehen sollen?

43) Zwei Zahlen deren Summe a ist, stehen in dem Verhältnisse m : n; welche Zahlen sind es?

44) Die Differenz zweier Zahlen ist d und ihr Verhältniß p : q; welches sind diese Zahlen?

45) In einem Testamente ist verordnet, daß die 6273 Mfl. betragende Erbschaft unter vier Erben A., B., C., D. dergestalt zu vertheilen sei, daß B. 50 Mfl., C. 70 Mfl. und D. 175 Mfl. weniger als A. erhalte; wie muß die Theilung geschehen?

46) Vier Städte A., B., C., D. haben zusammen 42344 Einwohner und zwar B. 700 weniger als A., C. 200 weniger als B., D. aber 400 mehr als C.; wieviel Einwohner zählt jede Stadt?

47) Zwei geschlossene Gesellschaften zählen zusammen 125 Mitglieder; würde aber die erste Gesellschaft doppelt soviel und die zweite 3mal soviel Mitglieder zählen, als sie wirklich zählen, so hätten beide Gesellschaften gleichviel Mitglieder. Wieviel Mitglieder zählt jede Gesellschaft?

48) Drei Amtsbezirke haben zusammen 403 Mann zu Schanzarbeiten zu schicken; wieviel Mann kommen aus jedem Amte, wenn die zu schickende Menge der Arbeiter vom gegengenseitigen Verhältnisse der Einwohner abhängt, und das Amt B. 5mal und das Amt C. 7mal soviel Einwohner zählt als das Amt A.?

49) Ein Kaufmann erzählte, daß ihm seine drei Handelsartikel zusammen monatlich einen Gewinn von 80 Thaler geben, und zwar der zweite $\frac{2}{5}$ mehr als der erste und der dritte $\frac{7}{8}$ weniger als der zweite. Welchen Gewinn gibt jeder Artikel?

50) Ein Familienvater hat 2 Knaben und 3 Mädchen. Auf die Erziehung eines Knaben wendet er monatlich 2 Thaler mehr als auf die eines Mädchens, ferner braucht er für sich und seine Frau monatlich 14 Thaler weniger als er auf die Erziehung seiner Kinder verwendet, für die Haushaltung 6 Thaler mehr als er für sich und seine Frau bedarf, und für die Nebenausgaben könnte er monatlich noch 3 Knaben und 2 Mädchen erziehen lassen. Wieviel wendet dieser Familienvater auf jedes einzelne Bedürfniß, da er von seinem monatlich 250 Thaler betragenden Gehalte noch 54 Thaler zurücklegen kann?

51) Ein Geschäftsmann verwendete eines Jahres $\frac{1}{50}$ seiner gesammten Einnahme auf die Unterhaltung seiner Fabrik, $\frac{2}{3}$

auf Arbeitsmaterialien, $\frac{1}{35}$ auf seine Haushaltung und behielt dennoch 840 Thaler übrig. Wieviel nahm dieser Geschäftsmann ein?

52) Jemand hat eine Schuld von 201 Thaler zu bezahlen. Weil er nicht genug Geld von einer Geldsorte vorräthig hat, so sieht er sich genöthigt, dieselbe durch Preuß. Thaler, durch Speziesthaler (à 1 Thlr. 8 Gr.), durch Dukaten (à 3 Thlr. 8 Gr.) und durch Louisd'ors (à 5 Thlr. 12 Gr.) zu bezahlen und von jeder Münzsorte gleichviel Stück zu geben. Wie viel Stück erhält der Gläubiger von jeder Sorte?

53) Hätte ich kein Vermögen, sagte ein Mann, so müßte ich, wenn ich eben so wie jetzt leben wollte, jährlich 210 Thaler Schulden machen: denn ich bedarf $\frac{4}{5}$ meines Gehaltes für den Gesammtunterhalt meiner und meiner Familie und $\frac{2}{3}$ desselben für Nebenausgaben. Welches ist der Gehalt dieses Mannes?

54) Ein Verstorbener hatte in seinem Testamente festgesetzt, daß die ganze Erbschaft unter seine 3 Enkel und 5 Enkelinnen vertheilt werden sollte, und daß jeder Enkel 80 Thlr. mehr als eine Enkelinn erhalte. Nach der Theilung der Erbschaft fand es sich, daß die Enkelinnen zusammen 450 Thlr. mehr als die Enkel hatten. Wie groß war die Erbschaft und was erhielt ein Enkel und was eine Enkelinn?

55) A. will seine Uhr mit der des B. vertauschen und sagt zu B.: Geben Sie mir ihre Uhr und noch 4 Thaler, so sollen Sie die meinige haben. — Diesen Tausch kann ich nicht eingehen, erwidert B., denn Ihre Uhr kostete mich dann die Hälfte mehr als die meinige. Wie hoch rechnet jeder seine Uhr?

56) A. kaufte sich zwei Bücher. Das erste hielt 32 Bogen, das zweite 42 Bogen und vom letztern gilt der Bogen 6 Pfennige mehr als vom erstern. Als A. nach dem Rabbatt fragte, sagte der Buchhändler: Sie erhalten auf beide Bücher 22 Gr. nachgelassen, denn ich gebe vom Thaler 4 Gr. Rabbatt. Wieviel bezahlte A. für jedes der zwei Bücher?

57) Einem Fuhrmann gibt man eine gewisse Menge Flaschen Schwefelsäure für 225 Thaler zu transportiren und behandelt die Fracht zum 9ten Theile des Werthes. Unterwegs zerbrechen

demselben 2 Flaschen, die er ersetzen muß, und er erhält noch, nach Abzug ihres Werthes am Orte der Versendung, 22 Thlr. Wie viel Flaschen hatte der Fuhrmann?

58) Ein Fabrikant fertigt nur eine Sorte Zeug. Von seinem gesammten Vorrathe nimmt der Kaufmann A $\frac{1}{4}$, vom Reste der B $\frac{1}{5}$ und noch 9 Ellen, und den nunmehrigen Rest verkauft er, die Elle zu 8 gl., um 75 Thlr. Wie groß war der Vorrath dieses Fabrikanten?

59) Ein verabschiedeter Soldat vermiethete sich unter der Bedingung zu einem Bürger, daß wenn derselbe Arbeit habe, er ihm die Kost und täglich 5 gl. Lohn gäbe, und habe der Bürger keine Arbeit, so wolle er täglich 2 gl. Kostgeld entrichten. Wenn nun dieser Soldat nach 30 Tagen 3 Thlr. 8 gl. vom Bürger ausgezahlt erhielt, wie viel Tage mußte er nicht gearbeitet haben?

60) Die Kommunalgarde eines Städtchens hatte beschloßen sich eine schöne Fahne machen zu lassen. Nachdem jeder Gardist 6 gl. gesteuert, fehlten noch $7\frac{1}{2}$ Thlr., um den gesammten Kostenaufwand zu decken; es steuerte deshalb jeder Gardist noch 2 gl., und man erhielt so 5 Thlr. mehr, als die Fahne kostete. Wie viel kostet die Fahne und wie viel Kommunalgardisten hat dieses Städtchen?

61) Was für eine Münzsorte packen Sie da ein? fragte Jemand seinen Freund, den er zu besuchen kam. — Nun, lieber Freund, rathen Sie einmal zur Strafe für Ihre Neugierde, welche Münzsorte ich gepackt habe. — Es sind wohl Zweigroschenstücke? — Das wäre mir nicht lieb, denn dann müßte ich noch 30 Stück dazuthun, um die Schuld bezahlen zu können, die ich bezahlen will. — Nun so sind es Viergroschenstücke? — Auch die sind es nicht; wären es aber welche; dann könnte ich noch 30 Stück aus meinem Packete nehmen, und es würde eben so viel werth sein, als es jetzt werth ist. Welche Münzsorte und wie viel Stück enthält das Packet?

62) Ein Behälter zu Wasser faßt a Kubikfuß. Wie lange müssen die demselben Wasser zuführenden Röhren geöffnet

bleiben, wenn sie gleichzeitig geöffnet werden, da die erste Röhre m Kubikfuß in n Sekunden, die zweite m' Kubikfuß in n' Sekunden und die dritte m'' Kubikfuß in n'' Sekunden schüttet?

63) Wenn wird aber der Behälter vorstehender Aufgabe dann gefüllt werden, wenn die zweite Röhre um p' und die dritte um p'' Sekunden später, als die erste geöffnet wird?

64) In einem Behälter fließen durch eine Oeffnung in n Sekunden m Kubikfuß ein und durch eine zweite Oeffnung in n' Sekunden m' Kubikfuß ab. Wenn nun die das Wasser zu- und abführenden Röhren gleichzeitig geöffnet werden, und der Behälter zur Zeit der Oeffnung a Kubikfuß enthält: nach welcher Zeit wird das Wasser des Behälters ausgeflossen sein, vorausgesetzt, daß mehr ab- als zufließt?

65) Nach welcher Zeit wird das Wasser aus dem Behälter geflossen sein, wenn die Oeffnung zum Einfließen p Sekunden später, als die zum Abfließen geöffnet wird?

66) Nach welcher Zeit wird der Behälter leer geworden sein, wenn die Wasser zuführende Röhre um p Sekunden früher als die das Wasser abführende Röhre geöffnet wird?

67) Ein Wasserbehälter ist jetzt leer. Wenn nun durch eine Oeffnung demselben m Kubikfuß in n Sekunden zufließen, und durch eine andere Oeffnung ihm in n' Sekunden m' Kubikfuß entzogen werden, und die Menge des einfließenden Wassers größer als die des abfließenden ist: nach welcher Zeit werden sich dann a Kubikfuß Wasser im Behälter gesammelt haben?

68) Nach welcher Zeit werden sich aber a Kubikfuß Wasser im Behälter gesammelt haben, wenn in der vorstehenden Aufgabe, die Ausflußöffnung p Sekunden später, als die Einflußöffnung geöffnet wird?

69) Von zwei Ziegeldeckern deckt der eine 60 Stück und der andere 80 Stück in der Stunde ein. Wenn nun der erste schon 300 Stück eingedeckt hatte, als der zweite zu decken anfängt: nach welcher Zeit werden beide Ziegeldecker gleich

viel Stück eingedeckt haben, unter Voraussetzung, daß sie mit einander fortarbeiten?

70) Um sich ein kleines Vermögen zu sammeln, waren drei Brüder dahin übereingekommen, jeden Monat noch einen Thaler ihres Verdienstes zu dem zu legen, was jeder schon erspart hatte. Wenn nun die jetzige Baarschaft des A 25 Thlr., die des B 15 Thlr. und die des C 6 Thlr. beträgt: nach wie viel Monaten werden B und C zusammen so viel als A haben?

71) Jemand hat ein Vermögen von 1152 Thlr., einen Gehalt von monatlich 30 Thlr. und eine Ausgabe von monatlich 24 Thlr. Nach welcher Zeit wird er, von jetzt an gerechnet, eben so viel Gehalt erhalten haben, als sein durch die Ersparniß angewachsenes Kapital beträgt?

72) Jemand hat eine gewisse Menge Aepfel gekauft, um sie unter Kinder zu verschenken. Er vertheilt dieselben zu gleichen Theilen unter 8 Kinder und behält so vier Stück übrig; hätte er sie aber zu gleichen Theilen unter 9 Kinder vertheilt, so würden 6 Stück übrig geblieben und auf jedes Kind der letztern Theilung 1 Apfel weniger, als auf 1 Kind der ersten Theilung gekommen sein. Wie viel Aepfel waren es?

73) Ich habe Zwanzigkreuzer und Zehnkreuzer, und zwar 7 Zehnkreuzer mehr als Zwanzigkreuzer. Lege ich die Zwanzigkreuzer und Zehnkreuzer in 3 Häufchen zu gleichen Theilen, so behalte ich kein Stück übrig; lege ich sie aber zu gleichen Theilen in 7 Häufchen, so bleiben mir 3 Stück übrig und 1 Häufchen der ersten und 1 Häufchen der zweiten Anordnung enthalten zusammen 21 Stück. Wie viel Zwanzigkreuzer und Zehnkreuzer habe ich?

74) Zu einer gewissen Arbeit braucht der Arbeiter A 12 Stunden, der B 10 Stunden, und der C 8 Stunden. Nach welcher Zeit wird diese Arbeit gethan sein, wenn alle diese Arbeiter sie gleichzeitig anfangen?

75) Die in einer befestigten Stadt liegende Garnison kann, von jetzt an gerechnet, mit dem vorhandenen Proviante 8

Monate reichen. Zu dieser Garnison stößt aber nach $\frac{1}{5}$ Monate eine solche Verstärkung, die mit dem anfänglichen Proviante 16 Monate, und vom Eintreffen der Verstärkung an, nach $\frac{3}{5}$ Monaten eine dritte Truppe, die mit dem anfänglichen Proviante 20 Monate gereicht haben würde. Auf wie lange ist nun die gesammte Garnison mit Proviant versehen?

76) Vom Orte A aus geht ein Körper ab, der alle n Minuten m Fuß zurücklegt. c Minuten nach dem Abgange dieses Körpers, geht in derselben Richtung ein zweiter Körper ab, der m′ Fuß in n′ Minuten macht. Wenn nun der zweite Körper schneller geht als der erste, nach welcher Zeit wird dieser den ersten eingeholt haben?

77) Von C nach A geht ein Kourier, der in jeder Stunde m′ Meilen macht, und von B nach A ein zweiter, der in jeder Stunde m Meilen zurücklegt. Wenn nun die drei Orte A, B, C hinter einander, und der Ort B dem Orte A um a Meilen näher liegt, als der Ort C, ferner der von C ausgehende Kourier schneller geht, als der von B ausgehende und beide gleichzeitig abgehen: nach wie viel Stunden wird alsdann der von C kommende Kourier den andern eingeholt haben?

78) Wie groß muß die Entfernung der Orte B und A sein, wenn die Kouriere, unter den Bedingungen, die in der vorstehenden Aufgabe angegeben sind, gleichzeitig in A eintreffen sollen?

79) Aus den a Fuß von einander entfernten Orten A und B gehen gleichzeitig zwei Körper ab. Der erste geht von B nach A und macht jede Minute m Fuß, der zweite geht von A nach B und macht jede Minute m′ Fuß. Nach welcher Zeit werden sich diese Körper begegnen, wenn sie gleichzeitig sich zu bewegen anfangen, und welchen Weg hat jeder von der Begegnung aus, noch zurückzulegen, um den Abgangsort des andern Körpers zu erreichen?

80) Dresden ist von Leipzig $12\frac{3}{4}$ Meilen entfernt, und die von Dresden nach Leipzig gehende Eilpost legt diesen Weg in 11 Stunden, die eben diesen Weg machende ordinäre Post aber in 18 Stunden zurück. Wenn nun eines Tages die or-

dinäre Post 8 Stunden früher abfuhr als die Eilpost: wie viel Stunden kann dann die ordinäre Post noch fahren, ehe sie von der Eilpost eingeholt wird, oder, wie viel Stunden nach der Abfahrt der Eilpost wird diese die ordinäre Post eingeholt haben?

81) Wenn nun unter den vorstehenden Bedingungen die ordinäre Post von Leipzig und die Eilpost von Dresden gleichzeitig abgehen, wie viel Meilen wird jede Post zurückgelegt haben, wenn sie sich begegnen?

82) Die ordinäre Post geht eines Tages 6 Stunden früher von Leipzig, als die Eilpost von Dresden ab. In welcher Entfernung von Leipzig werden sich die Posten begegnen?

83) Ein gewisses durch A dargestelltes Ganze soll so in mehre Theile getheilt werden, daß wenn der erste Theil a, der zweite sodann b, der dritte c, der vierte d u. s. f. ist; wie groß ist jeder Theil?

Welche praktische Regel leitet sich aus den gefundenen Theilen für die Gesellschaftsrechnung ab?

84) Eine durch A gegebene Größe soll so in mehre Theile so getheilt werden, daß sich der erste zum zweiten wie a : b, der zweite zum dritten wie c : d, der dritte zum vierten wie e : f u. s. f. verhalte. Welche Theile sind dies?

Welche praktische Regel leitet sich aus den gefundenen Theilen für solche in Zahlen gegebene Beispiele ab?

85) Aus a und c löthigem Silber sollen m Mark b löthiges gemischt werden. Wie viel Mark muß man von jeder Sorte zur Mischung nehmen?

Wenn man die vorstehende Aufgabe in folgende allgemeine verwandelt:

> Aus zwei Ingredienzen, von welchen die erste die Güte a und die andere die Güte c hat, soll die Masse m von der Güte b gemischt werden. Wie viel muß von jeder Ingredienz zur Mischung genommen werden?

welches praktische Verfahren läßt sich alsdann für die einfache Vermischungsrechnung ableiten?

86) Zu n Mark $a$löthigem Silber soll so viel von $c$löthigem zugesetzt werden, bis die Mischung $b$löthig wird. Wie viel Mark sind vom $c$löthigen Silber zu nehmen?

---

2) Gleichungen des ersten Grades mit mehrern unbekannten Größen.

1) Worin besteht die Auflösung oder die Bestimmung des Werthes einer unbekannten Größe zweier zusammengehörender und von einander unabhängiger Gleichungen, und wie viel Eliminationsmethoden kann man anwenden?

2) Wie verfährt man überhaupt bei der Reduktion der Gleichungen mit mehr als zwei unbekannten Größen?

Aufgaben.

a) Angesetzte Aufgaben zur Reduktion.

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 31, \\ 3x - 2y = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4y - 3x + 5 = 4, \\ 6x - 5y = 26. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2\frac{1}{2}y = 196\frac{1}{2}, \\ 6x - 7y = -383. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 8y = 41 + 3x, \\ 10y - 8x = 64. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x - 4y = 30{,}93, \\ 7y - 4x = -41{,}16. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 12y + 8z = -71{,}3172. \\ -7y - 5z = 41{,}8357. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 6x - 8z = 8\frac{2}{7}, \\ 3z + 7x = 30\frac{17}{21}. \end{cases}$

8) $$\begin{cases} 5x = 6y - 62\tfrac{1}{2}, \\ 4\tfrac{1}{3}x + 1\tfrac{1}{7}y = -29\tfrac{1}{2}. \end{cases}$$

9) $$\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c_{\prime}. \end{cases}$$

10) $$\begin{cases} 5x + 3y = 11a + 8b, \\ 6y - 5x = 13a + 37b. \end{cases}$$

11) $$\begin{cases} 2px + 2py = 6m - 2, \\ 6py - 4px = 8m - 21 + 40p. \end{cases}$$

12) $$\begin{cases} 2mx + 28f = 3my + 31p - 9g, \\ 2\tfrac{1}{2}my + 10p = 17g - 1\tfrac{1}{2}mx - 17f. \end{cases}$$

13) $$\begin{cases} (1)\ 3x + y - z = 10, \\ (2)\ x + y - 2z = -3, \\ (3)\ 2x - y + z = 15. \end{cases}$$

14) $$\begin{cases} (1)\ x + y + z = 3m + 3n \\ (2)\ x - y - z = -m - n, \\ (3)\ z - y - x = -m + 3n. \end{cases}$$

15) $$\begin{cases} (1)\ x + y + z = 12, \\ (2)\ 5x + 4y - 2z = 21, \\ (3)\ 3z - y + 6x = 29. \end{cases}$$

16) $$\begin{cases} (1)\ x - y - z = -11, \\ (2)\ 2y - 3x - 5z = -22, \\ (3)\ z - 2x + 7y = 10. \end{cases}$$

17) $$\begin{cases} (1)\ 2x + 3y + 4z = 20ab + 34cd, \\ (2)\ 5x - 2y + 3z = 5ab - 2cd, \\ (3)\ 5z - 4y - 3x = 28cd - 17ab. \end{cases}$$

18) $$\begin{cases} (1)\ ax + by + cz = d, \\ (2)\ a'x + b'y + c'z = d', \\ (3)\ a''x + b''y + c''z = d''. \end{cases}$$

19) $\begin{cases} (1)\ 5x + 4z = 55\frac{1}{2}, \\ (2)\ 8x - 3y = 33, \\ (3)\ 5z = 8y + 5\frac{2}{3}. \end{cases}$

20) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = a, \\ \dfrac{1}{z+x} = b, \\ \dfrac{1}{y+z} = c. \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dfrac{m}{nx+pz} = a, \\ \dfrac{n}{dx+fz} = b, \\ \dfrac{p}{mz-ny} = c. \end{cases}$

22) $\begin{cases} 6 = \dfrac{69}{x+y}, \\ \dfrac{45}{4(x-z)} = 5, \\ \dfrac{819}{y+3z} = 28. \end{cases}$

23) $\begin{cases} (1)\ x + y + z + w = 10, \\ (2)\ 4x + 3y + 2z + w = 20, \\ (3)\ 2x + 5y - z - 2w = 1, \\ (4)\ 6w - x + y - z = 22. \end{cases}$

24) $\begin{cases} (1)\ x + y + z = 2, \\ (2)\ x + y + w = -5, \\ (3)\ y + z + w = -3, \\ (4)\ x + z + w = 0. \end{cases}$

25) $\begin{cases} (1)\ 2x + 3y - z = 7, \\ (2)\ 3x + 2y - 2w = -3, \\ (3)\ 4x - 3z + 3w = 6, \\ (4)\ y + 2z - 5w = -7. \end{cases}$

26) $\begin{cases} (1)\ 3x + 5z = 14\frac{1}{2}, \\ (2)\ 4x - y = 23, \\ (3)\ 3y + 4w = -19\frac{2}{3}, \\ (4)\ 5z - 3w = 1\frac{1}{2}. \end{cases}$

27) $\begin{cases} (1)\ x + y + z + w + v = 23, \\ (2)\ 3x + 2y - z + 4w = 31, \\ (3)\ 5x + 3y + z - v = 17, \\ (4)\ x - 5y + 2w - v = -8, \\ (5)\ 6y - 5z + 3w - 7v = -38. \end{cases}$

28) $\begin{cases} (1)\ x + y + z + w = a, \\ (2)\ x + y + z + v = a', \\ (3)\ x + y + w + v = a'', \\ (4)\ x + z + w + v = a''', \\ (5)\ y + z + w + v = a''''. \end{cases}$

b) Aufgaben für Gleichungen mit zwei und mehrern unbekannten Größen.

1) Von zwei Zahlen gibt das Dreifache der größeren und das Vierfache der kleineren die Summe 31; und die Summe eben dieser Zahlen, dividirt durch ihre Differenz, den Quotienten 7. Welche Zahlen sind dies?

2) Zwei Brüder hatten zusammen 800 Thlr. Nachdem dem Aelteren noch eine Erbschaft von 300 Thlr. zugefallen war, hatte er $\frac{1}{5}$ mehr als der Jüngere. Wie viel gehörte Jedem von den 800 Thlr.?

3) Jemand hat zwei Beutel mit Geld. Nimmt er aus dem ersten Beutel den dritten Theil heraus und legt ihn in den zweiten, so enthält dieser 22 Thlr., nimmt er aber den dritten Theil aus dem zweiten Beutel und legt ihn in den ersten, so enthält dieser so viel Thaler, als im zweiten anfänglich enthalten waren. Wie viel Thaler enthielt anfänglich jeder Beutel?

4) Ein Kaufmann schickt seinem Handelsfreunde 100 Pfund Rauchtabak in zwei verschiedenen Sorten. Das Pfund der

ersten Sorte gilt 8 gl. und das Pfund der andern 5 gl., und die ganze Rechnung beträgt 30 Thlr. 5 gl. Wie viel Pfund schickte der Kaufmann von jeder Sorte?

5) Ich und meine Frau sind jetzt zusammen 46 Jahre, und nach vier Jahren wird sich mein Alter zu dem meiner Frau wie 14 : 13 verhalten. Wie alt bin ich und wie alt ist meine Frau?

6) Eine aus Blei und Zinn bestehende Mischung wiegt 22 Pfund. Würde man dieser Mischung noch 2 Pfund Blei und 4 Pfund Zinn zusetzen, so verhielte sich das Blei der Mischung zum Zinn derselben, wie 11 : 14. Aus wie viel Pfunden Blei und Zinn besteht die Mischung?

7) Von zwei Sorten Zeug zu ungleichen Preisen kauft Jemand 6 Ellen von der ersten und 5 Ellen von der zweiten Sorte und bezahlt dafür 19 Thlr. Nach einiger Zeit kauft er von eben diesen Zeugen, und zwar 4 Ellen von der ersten und 8 Ellen von der zweiten Sorte und bezahlt dafür, weil die Elle der ersten Sorte um 4 gl. theurer und die der zweiten um 3 gl. billiger geworden ist, $23\frac{2}{3}$ Thlr. Was kostete anfänglich die Elle von jeder Sorte Zeug?

8) In einer Festung liegen Liniensoldaten und Artilleristen. Ein Gemeiner von der Linie erhält täglich 18 pf. und ein Gemeiner von der Artillerie 21 pf. und so beträgt die tägliche Löhnung der Gemeinen beider Corps 33 Thlr. 8 gl. Später, als noch 50 Artilleristen in die Festung gelegt und dafür 100 Mann von der Linie herausgenommen wurden, waren so viel Artilleristen und Liniensoldaten vorhanden, daß auf 5 Mann Artilleristen 4 Mann von der Linie kamen. Wie viel Artilleristen und wie viel Mann von der Linie lagen anfänglich in der Festung?

9) A sagte zu B: Du weißt, daß ich weniger Gehalt habe als Du, obschon meine Arbeit nicht geringer als die Deinige ist; wäre mein Gehalt nur um den sechsten Theil des Deinigen größer, so würde ich ganz zufrieden sein, und ich stände mich 20 p. C. höher als jetzt. — Hätte ich, erwiederte hierauf B, die kürzlich erbetene Zulage erhalten,

und wäre sie doppelt so groß ausgefallen, als die Differenz unserer Gehalte ist; so würde ich jeden Tag des Jahres 2 Thlr. zu verzehren gehabt haben, und die noch übrigen 70 Thlr. hätte ich gern den Armen geschenkt. Wie viel jährlichen Gehalt hat Jeder?

10) Die Quersumme einer zweistelligen Zahl des dekadischen Zahlensystems ist 12, und setzt man die Ziffern derselben in umgekehrter Ordnung, so ist die entstehende Zahl um 18 kleiner als die zu suchende. Welche Zahl hat die genannten Eigenschaften?

11) Subtrahirt man vom Zähler eines Bruches 1 und addirt zum Nenner 4, so wird derselbe zu $\frac{1}{3}$; addirt man aber zum Zähler desselben Bruches 3 und zu seinem Nenner 7, so wird derselbe zu $\frac{2}{5}$. Welcher Bruch ist dies?

12) Jemand hat zwei Kapitale verliehen, das erste zu 3 p. C. und das andere zu 4 p. C. und bezieht davon jährlich 290 Thlr. Zinsen. Hätte er aber das zweite Kapital zu 3 p. C. und das erste zu 4 p. C., so könnte er jährlich nur 270 Thlr. ziehen. Wie groß sind die verliehenen Kapitale?

13) Von zwei Punkten A und B aus bewegen sich zwei Körper gleichzeitig in gerader Linie gegen einander. Die Begegnung dieser Körper findet nach 3 Sekunden statt, und es muß der erste Körper, um nach B zu gelangen, noch 9 Fuß, und der zweite Körper, damit er nach A komme, noch 15 Fuß durchlaufen. Würde aber der erste Körper in jeder Sekunde 1 Fuß und der zweite 5 Fuß mehr durchlaufen, so würde sich, im Momente der Begegnung, der vom ersten Körper zurückgelegte Weg zu dem des zweiten wie 3 : 4 verhalten. Wie viel Fuß legt jeder Körper in 1 Sekunde zurück?

14) Ein Verein für die Beförderung der Industrie eines Landes setzt jährlich zwei Preise unter N. 1. und N. 2. für die beßten Fabrikate aus und bestimmt das Verhältniß der Prämie von N. 1. zu N. 2 wie 5 : 3. Wenn nun dieses Jahr die zu vertheilende Summe 800 Thlr. beträgt

und unter den Fabrikaten eins mit N. 1. und zwei mit N. 2. vorkommen, wie viel fällt von der zu vertheilenden Summe auf N. 1. und wie viel auf N. 2.?

15) Wie müßte aber die Vertheilung dann geschehen, wenn unter den Fabrikaten zwei mit N. 1. und eins mit N. 2. gefunden würde?

16) Ein gewisses Kapital zu gewissen Prozenten verliehen, gibt nach einem Jahre a Zinsen. Würde man aber dasselbe Kapital um n Prozente mehr verleihen, so würde es jährlich b Zinsen tragen. Wie groß ist das verliehene Kapital und wie viel Zinsen trägt jedes Hundert desselben in 1 Jahre?

17) Jemand hat ein gewisses Kapital zu gewissen Prozenten verliehen und zieht so jährlich 150 Thlr. Zinsen. Würde er aber von jedem Hundert jährlich 1 Thaler mehr Zinsen nehmen als jetzt, so würden die jährlichen Zinsen desselben Kapitals 180 Thlr. betragen. Wie groß ist dieses Kapital und zu wie viel Prozent ist es verliehen?

18) Es sind drei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, daß die zweite vom Doppelten der ersten abgezogen die Differenz 12, ferner die Hälfte der ersten mit dem dritten Theile der zweiten 16 und endlich die dritte Zahl von der zweiten abgezogen, den fünften Theile der ersten Zahl gibt. Welche Zahlen haben diese Eigenschaften?

19) Der Name einer sehr bekannten Stadt besteht aus drei Buchstaben. Bezeichnet man die Buchstaben durch die Zahlen, welche ihre Stellung im Alphabete angeben, nämlich a durch 1, b durch 2, c durch 3 u. s. f.: so ist die Summe des ersten und zweiten Bubstabens 31, die Summe der Zahlen des zweiten und dritten 26 und die Summe der Zahlen des ersten und dritten Buchstabens 29. Wie heißt die Stadt?*)

---

*) Nachdem die Zahlen gefunden sind, so sucht man die denselben entsprechenden Buchstaben, setzt diese in der Ordnung neben einander, wie sie in der Aufgabe angegeben sind, und man erhält den gesuchten Namen.

20) Einstmals wollte ich drei Körper abwiegen, doch hatte ich nicht so viel Gewichte, als daß ich im Stande gewesen wäre, jeden für sich zu wiegen. Ich legte deshalb den ersten Körper in die eine Wagschale und den zweiten in die andere und mußte in diese Wagschale noch 4 Pfund legen, damit die Zunge gehörig einspielte. Dann nahm ich den dritten Körper in die erste und den zweiten in die andere Wagschale und ich mußte zum letztern noch 5 Pfund legen, damit die Zunge abermals einspielte. Endlich nahm ich den ersten und zweiten Körper in die eine und den dritten in die andere Wagschale, und bedurfte in diese noch 22 Pfund, damit sie der andern die Wage hielt. Wie viel Gewicht hat jeder Körper?

21) Ein Privatlehrer hatte grüne, blaue und weiße Stundenmarken vor sich liegen und gab seinen Rechnenschülern auf, aus den folgenden Angaben den Preis einer Marke von jeder Farbe zu berechnen: Die Preise einer grünen, blauen und weißen Marke verhalten sich wie 2 : 3 : 4, und für 3 grüne und 2 blaue Marken erhalte ich 16 gl. mehr, als für zwei weiße. Wie viel gilt 1 Marke von jeder Farbe?

22) Von drei benachbarten Mühlen kann die erste in eben der Zeit 5 Scheffel Getraide mahlen, in welcher die zweite nur 3 Scheffel zu mahlen im Stande ist, und die erste mählt 7 Scheffel in eben der Zeit, in welcher die dritte nur 4 Scheffel liefert. Nun sollen 300 Scheffel Getraide möglichst schnell gemahlen werden und es fragt sich, wie viel Scheffel jeder von diesen drei Mühlen zuzufahren sind, damit der gewünschte Zweck erreicht wird?

23) Ein Wasserbehälter mit drei Abflußröhren faßt a Kannen Wasser. Die Wassermenge, die in einer gewissen Zeit aus der ersten Röhre fließt, verhält sich zu dem Wasser, welches in derselben Zeit durch die zweite Röhre geht, wie m : n, und die Wassermenge, welche die erste und dritte nach gleicher Zeit schütten, wie p : q. Wenn nun die a Kannen Wasser durch diese drei Röhren gleichzeitig abfließen, wie viel Kannen Wasser gehen dann durch jede Röhre?

24) Eine Scheibenschützen-Gesellschaft bestimmt für einen Hauptgewinn und zwei Prämien eine Summe von 50 Thlr. Seit dem Bestande dieser Gesellschaft waren beide Prämien neben dem Hauptgewinne nicht zugleich zu bezahlen gewesen. In der Erwartung, daß auch diesmal neben dem Hauptgewinne nur eine der zwei Prämien zu bezahlen sein werde, bestimmen sie, daß wenn die erste Prämie falle, der Hauptgewinn $\frac{7}{9}$ und die erste Prämie $\frac{2}{9}$, falle aber nur die zweite Prämie, der Hauptgewinn $\frac{4}{5}$ und die zweite Prämie $\frac{1}{5}$ vom ausgesetzten Preise erhalte. Nun fallen aber gerade diesmal beide Prämien, und es fragt sich, wie viel von den 50 Thlr. auf den Hauptgewinn und wie viel auf jede Prämie kommen.

25) Was haben Sie denn noch für Reste? fragte ein Schneider einen Jahrmarktsmann. Ich habe noch, erwiederte dieser, $10\frac{1}{2}$ Elle Tuch, 12 Ellen Kaisertuch und 15 Ellen Kasimir. Und was wollen sie dafür haben? fragte abermals der Schneider. Ich habe zwar den ganzen Markt hindurch, versetzte der Händler, nur zu festen Preisen verkauft, was Sie auch daraus sehen können, daß mir die eine von den zwei Damen, die Sie noch an meiner Bude gesehen haben werden, für 3 Ellen Tuch und 12 Ellen Kasimir 20 Thlr. und die andere für 6 Ellen Kasimir und 14 Ellen Kaisertuch 25 Thlr. bezahlte; doch sagen Sie, was Sie anlegen wollen, ich werde so billig sein, als es mir nur möglich ist, denn ich möchte gern heute noch fort. Ich will Ihnen, sagte der Schneider, für Ihre ganzen drei Reste 50 Thlr. geben. Dafür kann ich sie Ihnen unmöglich lassen, versetzte der Händler, doch sollen Sie sie alle für 60 Thlr. erhalten, aber billiger geht es nicht, denn schon hierdurch verkaufe ich $14\frac{2}{7}$ pC. billiger, als ich es den ganzen Jahrmarkt hindurch gethan habe.

Wie viel kostet die Elle Tuch, die Elle Kaisertuch und wie viel 1 Elle Kasimir?

26) Vier Zahlen sind durch folgende Merkmale zu bestimmen: Die vierte Zahl von der drei ersten abgezogen läßt 5, die dritte Zahl von der Summe der übrigen 9, die zweite von

der Summe aller übrigen 13, und die erste Zahl von der Summe aller übrigen die Differenz 19.

Welche Zahlen haben diese Eigenschaften?

27) Die Summe von vier Zahlen ist s, und wenn man die erste Zahl zur zweiten, dann zur dritten und endlich zur vierten addirt und von jeder so bestimmten Summe die zwei andern Zahlen abzieht, so ergeben sich auf einander folgend die Zahlen a, a', a''. Durch welche Formeln sind diese vier Zahlen ausgedrückt?

28) Zwei Kapitale geben mit ihren einjährigen Zinsen 1578 Thlr., ferner das erste Kapital mit seinen 3jährigen und das andere mit seinen 2jährigen Zinsen 1680 Thlr., endlich verhält sich das erste Kapital zum zweiten wie 2 : 3 und der jährliche Zinsertrag des ersten zu dem des zweiten wie 4 : 9. Wie groß sind diese Kapitale und zu wie viel pC. ist jedes verliehen?

29) Zwei Kapitale mit ihren 1jährigen Zinsen geben a, das erste Kapital mit seinen njährigen und das zweite mit seinen n'jährigen Zinsen a', ferner verhält sich das erste Kapital zum zweiten wie p : q, und der 1jährige Zinsertrag des ersten Kapitals zu dem des zweiten wie $p' : q'$. Durch welche Formeln werden diese Kapitale und durch welche die pC. ausgedrückt, zu welchen sie verliehen wurden?

30) Man weiß, daß 697 Leipziger Pfunde 803,55 Breslauer Pfunden gleich sind, ferner, daß sich 2 Leipziger Pfunde zu 3 Wiener Pfunden wie 1 : 1,7978 verhalten, daß 100 Berliner Pfunde $115\frac{3}{5}$ Breslauer Pfunden gleich gerechnet werden, und daß 1 Wiener und 1 Berliner Pfund 2679,5 holländische Asse mehr enthalten, als 1 Leipziger und 1 Breslauer Pfund.

Wie viel holländische Asse enthält 1 Breslauer, 1 Leipziger, 1 Berliner und 1 Wiener Pfund?

31) Zwei benachbarte Bauern helfen sich gegenseitig mit ihren Erzeugnissen aus. Im verflossenen Winter mangelte es dem Bauer A an Erdbirnen und Korn, dem Bauer B aber an Hafer und Heu. Es gab deshalb A dem B 2 Scheffel

Hafer und 3 Zentner Heu und B dem A 6 Scheffel Erdbirnen und 2 Scheffel Korn. Ein zweitesmal gab der A dem B 1 Scheffel Hafer und 2 Zentner Heu, und der B dem A 2 Scheffel Korn und 1 Scheffel Erdbirnen. Ein drittesmal gab A dem B 5 Scheffel Hafer und 4 Zentner Heu, und B dem A 5 Scheffel Korn und 2 Scheffel Erdbirne.

Als diese Bauern hierauf Abrechnung hielten, fand es sich, daß vom ersten Tausche her, der A vom B noch 3 Thlr., vom zweiten Tausche der B vom A noch 8 gl. und vom dritten Tausche der A vom B noch 1 Thlr. 8 gl. zu fordern hatte: es gab deshalb der B dem A 2 Kälber und 1 junge Ziege, worauf der A, weil 1 Kalb 4 gl. billiger als 1 Scheffel Hafer und die junge Ziege $\frac{1}{6}$ Zentner Heu gleich gesetzt wurde, noch 4 gl. zurückzahlen muß, um die gegenseitigen Forderungen völlig aufzuheben.

Wie hoch ist 1 Scheffel Hafer, 1 Zentner Heu, 1 Scheffel Erdbirne, 1 Scheffel Korn und die junge Ziege gerechnet?

32) Ich habe zwei Brüche und eine ganze Zahl vor mir. Addire ich zum Zähler des ersten Bruches 2, zu seinem Nenner aber 1, so erhalte ich $\frac{1}{3}$; nehme ich den Nenner des zweiten Bruches statt des Zählers des ersten Bruches, so ergibt sich $\frac{1}{2}$; addire ich die ganze Zahl zum Zähler des zweiten Bruches, so wird derselbe zu 1; schreibe ich der ganzen Zahl den um 2 erniedrigten Nenner des ersten Bruches unter, so ergibt sich $\frac{1}{4}$; nehme ich endlich den Zähler des zweiten Bruches mit dem des ersten zusammen und dividire diese Summe durch die Summe der Nenner eben dieser Brüche, so wird $\frac{1}{5}$ daraus.

Wie groß ist die ganze Zahl und welche zwei Brüche haben die genannten Eigenschaften?

XII.

Gleichungen des zweiten Grades.

1) Mit einer unbekannten Größe.

1) Wenn heißt eine Gleichung eine quadratische oder eine Gleichung vom zweiten Grade?

2) Wie theilt man die quadratischen Gleichungen ein?

3) Wenn heißt eine quadratische Gleichung eine reinquadratische?

4) Wenn eine vollständig-quadratische?

5) Und wenn eine unvollständig-quadratische?

6) Wie verfährt man bei der Auflösung reinquadratischer Gleichungen von der Form

$ax^2 = b$; $ax^{2m} = b$.

7) Wie lös't man vollständig-quadratische Gleichungen, z. B.

$x^2 - 2bx + b^2 = c^2$ auf?

8) Wie lös't man die unvollständig-quadratischen Gleichungen, deren allgemeine Form

$x^2 = px + q$ ist, auf und welche praktische Regel leitet sich aus der gefundenen Auflösung für die Auflösung aller unvollständig-quadratischen Gleichungen ab?

9) Lassen sich auch vollständig-quadratische Gleichungen nach der Formel auflösen, deren man sich bei der Auflösung unvollständig-quadratischer Gleichungen bedient?

10) Sind auch Gleichungen von der Form

$x^{2m} = px^m + q$ wie unvollständig-quadratische Gleichungen aufzulösen, und wie verfährt man hierbei?

11) Was begreift man unter der Wurzel einer Gleichung und wie viel Wurzeln hat jede quadratische Gleichung?

12) Wie sind die Koeffizienten p und q einer quadratischen Gleichung von der Form

$x^2 = px + q$ aus den Wurzeln eben dieser Gleichung zusammengesetzt, und welche Sätze lassen sich daraus für quadratische Gleichungen ableiten?

Bemerkung über die quadratischen Gleichungen.

Nimmt man die quadratische Gleichung von der Form

(1) $x^2 + Ax + B = 0$ an, und setzt die Wurzeln derselben a und b, nämlich $x = a$ und $x = b$, so ergibt sich aus den Wurzelgleichungen

$x - a = 0$, $x - b = 0$, und durch Multiplikation dieser Gleichungen wird

$(x - a)(x - b) = 0$, oder

$x^2 - (a + b)x + ab = 0$, welche Gleichung mit der in (1) identisch sein muß; weshalb in Beziehung auf (1) ist

$A = -(a + b)$; $B = ab$.

Eine quadratische Gleichung von der in (1) gegebenen Form entsteht also durch Multiplikation ihrer auf 0 reduzirten Wurzelgleichungen; und es ist der Koeffizient A der ersten Potenz der unbekannten Größe aus der entgegengesetzten Summe und das Zahlenglied B aus dem Produkte der Wurzeln zusammengesetzt.

Die hier angeführte Zusammensetzung der Koeffizienten A und B einer quadratischen Gleichung von der in (1) gegebenen Form aus ihren Wurzeln läßt nun umgekehrt folgende Schlüsse für die Wurzeln aus den Koeffizienten ableiten:

1.) Beide Wurzeln einer quadratischen Gleichung von der Form $x^2 + Ax + B = 0$ sind negativ.

2.) Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung von der Form $x^2 - Ax + B = 0$ sind positiv.

3.) Eine quadratische Gleichung von der Form $x^2 + Ax - B = 0$ hat eine positive und negative Wurzel, und zwar ist die absolut größere Wurzel negativ und die absolut kleinere positiv.

4.) Eine quadratische Gleichung von der Form $x^2 - Ax - B = 0$ hat eine positive und eine negative Wurzel, und zwar ist die absolut größere Wurzel positiv, hingegen die absolut kleinere negativ.

5.) Jede quadratische Gleichung von der Form $x^2 \pm B = 0$ hat zwei absolut gleiche Wurzeln, von denen die eine positiv, die andere aber negativ ist.

Die Gleichung, die unter 1.) angegeben ist, und deren Wurzeln negativ sind, läßt sich auch durch

$-x^2 - Ax - B = 0$ darstellen. Aus dieser Gleichung und aus der unter 1.)

$+x^2 + Ax + B = 0$ erhält man, wenn man die Zeichen von je zwei neben einander stehenden Gliedern anschreibt, für eine quadratische Gleichung mit zwei negativen Wurzeln

$$(a) \begin{cases} - \; -, \; - \; - \\ + \; +, \; + \; + \end{cases}$$

Die Gleichung unter 2.) mit zwei positiven Wurzeln gibt auch

$- x^2 + Ax - B = 0$. Hieraus und aus der unter 2.) angegebenen Gleichung erhält man durch die Zusammenstellung der Zeichen zweier auf einander folgender Glieder

$$(b)\begin{cases} -+, +- \\ +-, -+ \end{cases}$$

Die unter 3.) und 4.) angegebenen Gleichungen mit einer positiven und negativen Wurzel sind von der Form

$x^2 + Ax - B = 0$,

$x^2 - Ax - B = 0$, und hieraus ergibt sich für folgende Zusammenstellung der Zeichen

$$(c)\begin{cases} ++, +- \\ +-, -- \end{cases}$$

Die Aufeinanderfolge zweier gleicher Zeichen, wie $++$, $--$, nennt man eine Folge, die Verschiedenheit aber, als $+-$, $-+$, einen Wechsel. Mit Zuziehung dieser Benennungen ergibt sich aus (a):

Eine quadratische Gleichung mit zwei Folgen der Zeichen hat zwei negative Wurzeln; aus (b):

Eine quadratische Gleichung mit zwei Wechseln der Zeichen hat zwei positive Wurzeln; aus (c):

Eine quadratische Gleichung mit einem Wechsel und einer Folge der Zeichen, hat eine positive und eine negative Wurzel; oder allgemein:

> Eine quadratische Gleichung hat so viel negative Wurzeln als sie Folgen der Zeichen, und so viel positive Wurzeln, als sie Wechsel der Zeichen hat.

Um nach dem Vorstehenden die Wurzeln einer quadratischen Gleichung von der Form

$x^2 - B = 0$ zu untersuchen, stelle man sich dieselbe durch

$x^2 \pm 0x - B = 0$ dar und man findet für

$+ x^2 + 0x - B = 0$ eine Folge und einen Wechsel, und für

$+ x^2 - 0x - B = 0$ einen Wechsel und eine Folge der Zeichen: die Gleichung

$x^2 - B = 0$ hat also eine positive und eine negative Wurzel.

Hat man aber die Gleichung

$x^2 + B = 0$, so ergeben sich, da diese durch

$+ x^2 \pm 0x + B = 0$ dargestellt werden kann, für

$$+ x^2 + 0x + B = 0$$ zwei Folgen, und für
$$+ x^2 - 0x + B = 0$$ zwei Wechsel der Zeichen.

Nach dem Erstern sollte die Gleichung zwei negative, nach dem Letztern aber zwei positive Wurzeln haben. Beides kann gleichzeitig nicht stattfinden, und es folgt hieraus nichts anderes, als daß die Gleichung

$x^2 + B = 0$ zwei imaginäre Wurzeln hat; wovon man sich auch sogleich überzeugen kann; nämlich

$$x^2 + B = 0,$$
$$x^2 = - B,$$
$$x = \pm \sqrt{- B},$$
$$x' = + \sqrt{- B},$$
$$x'' = - \sqrt{- B}.$$

Die eben entwickelten Sätze, wie man aus den Folgen oder Wechseln der Zeichen einer quadratischen Gleichung auf die Wurzeln der Zeichen schließen kann, gelten nur für Gleichungen mit reellen Wurzeln.

Da die Wurzeln einer quadratischen Gleichung von der Form

$x^2 = Ax + B$ enthalten sind in

$x = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} + B\right)}$, oder dieser Ausdruck die Wurzeln einer quadratischen Gleichung von der Form

$x^2 - Ax - B = 0$ gibt: so sind die Wurzeln einer Gleichung von der Form

(2) $x^2 \mp Ax - B = 0$ in

(3) $x = \frac{\pm A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} + B\right)}$, und die Wurzeln einer Gleichung von der Form

(4) $x^2 \mp Ax + B = 0$ in

(5) $x = \frac{\pm A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - B\right)}$ enthalten.

Aus (3) folgt, daß eine quadratische Gleichung von der in (2) gegebenen Form keine imaginäre Wurzeln haben kann, und aus (5), daß eine quadratische Gleichung von der in (4) aufgestellten Form imaginäre Wurzeln haben kann; und zwar alsdann die Wurzeln imaginär sind, wenn

$B > \frac{A^2}{4}$ ist.

Setzt man in (5) $\frac{A^2}{4} - B = -\beta$ und $\frac{A}{2} = \alpha$: so erhält man die Wurzeln einer quadratischen Gleichung von der Gestalt

$$x^2 \mp Ax + B = 0 \text{ unter der Form}$$
$$x' = \pm\alpha + \sqrt{-\beta};\quad x' = \pm\alpha - \sqrt{-\beta}.$$

Aus der Bildung einer quadratischen Gleichung durch ihre Wurzeln folgt auch, daß jede quadratische Gleichung sich durch eine ihrer auf 0 reduzirten Wurzelgleichungen muß ohne Rest dividiren lassen, und daß nothwendig der sich ergebende Quotient die auf 0 reduzirte zweite Wurzelgleichung eben dieser Gleichung ist. So ist z. B. eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 3x - 10 = 0,\quad x = 5 \text{ oder } x - 5 = 0,$$

denn setzt man in dieser Gleichung 5 statt x, so erhält man wirklich 0 und

$$(x^2 - 3x - 10) : (x - 5) = x + 2.$$
$$\begin{array}{l} x^2 - 5x \\ - \quad + \\ \hline \qquad 2x - 10 \\ \qquad 2x - 10 \\ \qquad - \quad + \end{array}$$

Weil Divisor und Dividend gleich 0 sind, muß auch der Quotient $x + 2 = 0$ sein; oder es ist $x = -2$ die zweite Wurzel der vorgelegten quadratischen Gleichung, wovon man sich durch Substitution überzeugen kann.

Der quadratischen Gleichungen kann man sich auch zur Zerfällung dreigliedriger Ausdrücke, deren allgemeine Größen die Form einer zweiten Potenz haben, bedienen. Ist z. B. der Ausdruck

$3a^2 - 6ab - 4b^2$ gegeben, so setze man denselben gleich 0, nehme a als unbekannte Größe an und entwickle die Werthe derselben, und man erhält

$$3a^2 - 6ab - 4b^2 = 0,$$
$$a^2 - 2ab - \tfrac{4}{3}b^2 = 0,$$
$$a^2 = 2ab + \tfrac{4}{3}b^2,$$
$$a = b \pm \sqrt{(b^2 + \tfrac{4}{3}b^2)},$$
$$a = b \pm \sqrt{\tfrac{7}{3}b^2} = b \pm b\sqrt{\tfrac{7}{3}} \text{ oder}$$
$$a = b \mp b\sqrt{\tfrac{7}{3}} = 0, \text{ und es ist die erste auf 0 reduzirte Wurzelgleichung}$$
$$a - b - b\sqrt{\tfrac{7}{3}} = 0 \text{ und die zweite}$$

$a - b + b\sqrt{\frac{7}{3}} = 0$, also die Faktoren des gegebenen Ausdruckes

$3a^2 - 6ab - 4b^2$, $a - b - b\sqrt{\frac{7}{3}}$ und

$a - b + b\sqrt{\frac{7}{3}}$ oder

$a - b(1 + \sqrt{\frac{7}{3}})$, $a - b(1 - \sqrt{\frac{7}{3}})$.

Die unvollständig-quadratischen Gleichungen sind auch durch Einführung trigonometrischer Funktionen aufzulösen.

Nimmt man die unvollständig quadratische Gleichung von der Form

$x^2 = Ax + B$ an, so ist bekanntlich

$x = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} + B\right)}$. Zieht man unter dem Wurzelzeichen den Faktor $\frac{A^2}{4}$ und bringt ihn vor das Wurzelzeichen, so wird

$$x = \frac{A}{2} \pm \frac{A}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{4B}{A^2}\right)} \text{ oder}$$

$$(1)\ x = \frac{A}{2}\left[1 \pm \sqrt{\left(1 + \frac{4B}{A^2}\right)}\right].$$

Welches Verhältniß auch die Größen A und B zu einander haben mögen, so wird doch immer zu setzen sein, ohne daß ein Widersinn entsteht,

$(2)\ \frac{4B}{A^2} = tg^2(2\alpha)$. Nach dieser Annahme ist nun

$$\frac{2}{A}\sqrt{B} = tg(2\alpha) \text{ und}$$

$(3)\ \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{B}}{tg(2\alpha)} = \sqrt{B}\,.\,cotg(2\alpha)$. Die Werthe aus (2) und (3) in (1) gesetzt, gibt

$$x = \sqrt{B}.\ cotg(2\alpha)[1 \pm \sqrt{(1 + tg^2(2\alpha))}] \text{ oder}$$

$$(4)\ x = \sqrt{B}.\ cotg(2\alpha)[1 \pm sec(2\alpha)], \text{ und}$$

$$x' = \sqrt{B}\,.\,cotg(2\alpha)[1 + sec(2\alpha)] =$$

$$\frac{\sqrt{B}.\ cosin(2\alpha)}{sin(2\alpha)}\left[1 + \frac{1}{cosin(2\alpha)}\right],$$

$$x' = \sqrt{B}\left[\frac{cosin(2\alpha) + 1}{sin(2\alpha)}\right]; \text{ aber}$$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ und

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}}$ d. g.

$2\cos^2(2\alpha) = 1 + \cos(2\alpha)$; folglich

$$x' = \sqrt{B}\left[\frac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\right] = \sqrt{B}\,.\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$\sqrt{B}\,.\,\mathrm{cotg}(\alpha) = \frac{\sqrt{B}}{\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Ferner folgt aus (4)

$x'' = \sqrt{B}\,.\,\mathrm{cotg}(2\alpha)[1 - \sec(2\alpha)]$, und wenn man wie vorstehend operirt,

$$x'' = \sqrt{B}.\,\frac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}\left[1 - \frac{1}{\cos(2\alpha)}\right] =$$

$$\sqrt{B}\left[\frac{\cos(2\alpha) - 1}{\sin(2\alpha)}\right] = -\sqrt{B}.\left[\frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}\right].$$

Es ist aber auch

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}}$, also $2\sin^2\alpha = 1 - \cos(2\alpha)$;

folglich

$$x'' = -\sqrt{B}.\left[\frac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\right] = -\sqrt{B}..\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= -\sqrt{B}\,.\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Für die unvollständig quadratische Gleichung

$$[I]\quad \begin{cases} x^2 = Ax + B \text{ wird also} \\ x' = \sqrt{B}\,.\,\mathrm{cotg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{B}}{\mathrm{tg}\,\alpha} \text{ und} \\ x'' = -\sqrt{B}\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{B}}{\mathrm{cotg}\,\alpha}, \text{ wo} \\ \mathrm{tg}(2\alpha) = \dfrac{2\sqrt{B}}{A} \text{ ist.} \end{cases}$$

Die der unvollständig quadratischen Gleichung

(4) $x^2 = -Ax + B$ entsprechenden Wurzeln sind durch

$$x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} + B\right)} \text{ oder durch}$$

$$x = -\left[\frac{A}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} + B\right)}\right],$$ oder was für die Wurzeln gleichbedeutend ist, durch

$$(5)\; x = -\left[\frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} + B\right)}\right]$$ ausgedrückt.

Weil $x = \left[\frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} + B\right)}\right]$ mit (1) übereinstimmt, und die zu (1) gehörenden Wurzeln in [I] enthalten sind: so werden, zufolge (5), die Wurzeln der Gleichung (4), die entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung in (1)

$x^2 = Ax + B$ sein, oder mit andern Worten: sind die Wurzeln der Gleichung

$x^2 = Ax + B$, a und $-b$, so sind die Wurzeln der Gleichung

$x^2 = -Ax + B$, $-a$ und $+b$. Man sehe hierüber überdies 3.) und 4.) Seite 100.

Für die Gleichung

$$[\text{II}]\quad \begin{cases} x^2 = -Ax + B \text{ wird also nach [I]} \\ x' = -\dfrac{\sqrt{B}}{\operatorname{tg}\alpha} = -\sqrt{B}\,.\operatorname{cotg}\alpha \\ x'' = \dfrac{\sqrt{B}}{\operatorname{cotg}\alpha} = \sqrt{B}\,.\operatorname{tg}\alpha, \text{ wo} \\ \operatorname{tg}(2\alpha) = \dfrac{2\sqrt{B}}{A} \text{ ist.} \end{cases}$$

Aus der Gleichung

$x^2 = Ax - B$ folgt

$$x = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - B\right)},$$

$$x = \frac{A}{2} \pm \frac{A}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{4B}{A^2}\right)}$$ oder

$$(6)\; x = \frac{A}{2}\left[1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{4B}{A^2}\right)}\right].$$

Setzt man

$\sin^2(2\alpha) = \dfrac{4B}{A^2}$, also

$\sin(2\alpha) = \dfrac{2\sqrt{B}}{A}$ in (6), so wird

$$x = \frac{A}{2}[1 \pm \sqrt{(1 - \sin^2(2\alpha))}] =$$

$$\frac{A}{2}[1 \pm \cos 2\alpha],$$ also

$$(7) \begin{cases} x' = \frac{A}{2}[1 + \cos(2\alpha)] \\ x'' = \frac{A}{2}[1 - \cos(2\alpha)]. \end{cases}$$ Nun ist

$$\sin\alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}\right)}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}\right)},$$ folglich

$$\begin{cases} 2\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha), \\ 2\cos^2(\alpha) = 1 + \cos(2\alpha); \text{ ferner folgt aus} \\ \sin(2\alpha) = \frac{2\sqrt{B}}{A};\ \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{B}}{\sin(2\alpha)} = \frac{\sqrt{B}}{2\sin\alpha\cos\alpha}. \end{cases}$$

Diese Werthe in (7) gesetzt, gibt

für die Gleichung

$$[III] \begin{cases} x^2 = Ax - B, \\ x' = \frac{\sqrt{B}}{2\sin\alpha\cos\alpha} \cdot 2\cos^2(\alpha) = \sqrt{B}.\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\sqrt{B}}{\mathrm{tg}\,\alpha}, \\ x'' = \frac{\sqrt{B}}{2\sin\alpha\cos\alpha} \cdot 2\sin^2(\alpha) = \sqrt{B}.\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{B}}{\mathrm{cotg}\,\alpha}, \text{ wo} \\ \sin(2\alpha) = \frac{2\sqrt{B}}{A} \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Wurzeln der Gleichung

$x^2 = -Ax - B$ sind von denen der Gleichung

$x^2 = Ax - B$ nur durch ihre Vorzeichen verschieden, d. h. sind die Wurzeln der Gleichung

$x^2 = -Ax - B$, $-a$ und $-b$, so sind die der Gleichung

$x^2 = Ax - B$, $+a$ und $+b$.

Zufolge des letztern erhält man die Wurzeln der Gleichung

$x^2 = -Ax - B$ aus [III], wenn die dort gefundenen entgegengesetzt genommen werden; es wird alsdann

für die Gleichung

$$[IV]\begin{cases} x^2 = -Ax - B, \\ x' = -\sqrt{B}\,.\,\text{cotg}\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{B}}{\text{tg}\,\alpha} \text{ und} \\ x'' = -\sqrt{B}\,.\,\text{tg}\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{B}}{\text{cotg}\,\alpha}, \text{ wo} \\ \sin(2\alpha) = \dfrac{2\sqrt{B}}{A} \text{ ist.} \end{cases}$$

Daß sowohl in [IV] als auch in [III]

$\sin(2\alpha) = \frac{2\sqrt{B}}{A}$ gesetzt werden konnte, da der Sinus irgend eines Bogens nie größer als 1 sein kann, beruht darauf, daß in jeder quadratischen Gleichung von der Form

$$x^2 = \pm Ax - B,$$

$\frac{A^2}{4} > B$ also $\frac{4B}{A^2}$ kleiner als 1 sein muß, wenn die Wurzeln derselben reell sein sollen.

Die Gleichung $x^2 = 3x + 375$ gehört zu dem unter [I] angeführten Falle, und es ist

$$A = 3, \quad B = 375$$

$$\begin{array}{rl} \log.\ \sqrt{B} = & 1,2870156 \\ \log.\ 2 = & \underline{0,3010300} \\ & 1,5880456 \\ \log.\ A = & \underline{0,4771213} \\ \log.\ \text{tg}(2\alpha) = & 1,1109243 \end{array}$$

$$2\alpha = 85^\circ\, 34'\, 14''; \quad \alpha = 42^\circ\, 47'\, 7''.$$

$$\log.\ x' = \log.\ \sqrt{B} - \log.\ \text{tg}\alpha = \begin{array}{r} 1,2870156 \\ \underline{0,9663919-1} \\ 1,3206237 \end{array}$$

$$x' = \text{num. log. } 1,3206237 = 20,9229.$$

$$\log.\ x'' = \sqrt{B}\,.\,\text{tg}\,\alpha = \begin{array}{r} 1,2870156 \\ \underline{0,9663919-1} \\ 1,2534075 \end{array}$$ und weil die zweite Wurzel negativ ist,

$$x'' = -\text{ num. log. } 1,2534075 = -17,9228.$$

Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung mittels der in [I], [II], [III] und [IV] aufgestellten Formeln zu bestimmen, dürfte nur höchst selten rathsam sein, denn man erhält dieselben schneller und bequemer durch die bekannte Reduktionsformel. Ich fügte die Auflösung der quadratischen Gleichungen durch trigonometrische Funktionen deshalb bei, um die Auflösung der kubischen Gleichungen mittels trigonometrischer Funktionen gleichsam vorzubereiten, und um ein Beispiel zu geben, wie trigonometrische Funktionen als Mittel in solchen Fällen oft gebraucht werden können, wo man so eigentlich nicht mit Linien zu thun hat.

Auf Seite 292 der Auflösungen ist bereits die bekannte Methode angegeben, wie man den einer quadratischen Gleichung von der Form

$x^2 = Ax + B$ entsprechenden Ausdruck

$x = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} + B\right)}$ ihrer Wurzeln bestimmt;

hier soll noch eine andere Methode für die Bestimmung eben dieses Ausdruckes folgen.

Die angeführte quadratische Gleichung

$x^2 = Ax + B$ gibt auch

$x^2 - Ax - B = 0.$

Setzt man hier $x = z + \frac{A}{2}$, so wird

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= z^2 + Az + \frac{A^2}{4} \\ -Ax &= -Az - \frac{A^2}{2} \\ -B &= \qquad\quad -B \end{aligned}\right\} \text{addirt}$$

$x^2 - Ax - B = z^2 - \frac{A^2}{4} - B = 0$, oder

$z^2 - \frac{A^2}{4} - B = 0,$

$z^2 = \frac{A^2}{4} + B,$

$z = \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} + B\right)}$; oder, da

$$x = z + \frac{A}{2}, \text{ also}$$

$$x - \frac{A}{2} = z \text{ ist,}$$

$$x - \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} + B\right)},$$

$$\begin{cases} x = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} + B\right)} \text{ für die Gleichung} \\ x^2 = Ax + B. \end{cases}$$

Bei der Auflösung einer quadratischen Gleichung mit der Reduktionsformel

$x = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} + B\right)}$ erscheint der Ausdruck

$\sqrt{\left(\frac{A^2}{4} + B\right)}$ bisweilen unter der Form $\sqrt{(p \pm \sqrt{q})}$.

Die Wurzel des Ausdruckes $p \pm \sqrt{q}$ läßt sich, wenn p und q in Zahlen gegeben sind, so genau entwickeln, als es nur immer die Umstände verlangen; doch wenn die Bedingung gestellt wird, wie es oft bei der Auflösung allgemeiner geometrischer Aufgaben der Fall ist, daß die genannte Wurzel vollkommen genau gefunden werden soll, muß ein anderer Weg eingeschlagen werden. Das, was darauf Bezug hat, soll jetzt folgen.

Es ist

$$(5 + \sqrt{3})^2 = 25 + 10\sqrt{3} + 3 = 28 + 10\sqrt{3},$$

$$(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})^2 = 6 + 4\sqrt{12} + 8 = 14 + 4\sqrt{12},$$

u. s. f. Die Quadratwurzel eines zweigliedrigen Ausdruckes von der Form

$p \pm \sqrt{q}$, wird demgemäß von der Form

$\sqrt{x} \pm \sqrt{z}$ sein, oder

(1) $\sqrt{(p \pm \sqrt{q})} = \sqrt{x} \pm \sqrt{z}$ gesetzt werden können.

Aus (1) folgt nun

$p \pm \sqrt{q} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{z})^2 = x \pm 2\sqrt{xz} + z = (x + z) \pm 2\sqrt{xz}$, und es muß jetzt sein

$p = x + z;\ \pm \sqrt{q} = \pm 2\sqrt{z}$, woraus denn folgt

(2) $p - x = z;$

(3) $q = 4xz.$ Den Werth für z aus (2) in (3) gesetzt, gibt

$$q = 4x(p - x) = 4px - 4x^2,$$

$4x^2 - 4px = -q$. Zu beiden Theilen dieser Gleichung p^2 addirt, gibt

$4x^2 - 4px + p^2 = p^2 - q$, und weil der erste Theil ein vollständiges Quadrat ist,

$$2x - p = \pm\sqrt{(p^2 - q)},$$

$$(4)\quad x = \frac{p \pm \sqrt{(p^2 - q)}}{2}.$$

Diesen Werth in (2) gesetzt, gibt

$$z = p - \frac{p \pm \sqrt{(p^2 - q)}}{2},$$

$$(5)\quad z = \frac{p \mp \sqrt{(p^2 - q)}}{2}.$$

Aus (4) und (5) folgt ferner

$$\sqrt{x} = \sqrt{\left(\frac{p \pm \sqrt{(p^2 - q)}}{2}\right)};$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{\left(\frac{p \mp \sqrt{(p^2 - q)}}{2}\right)}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (1) erhält man

$$\sqrt{(p \pm \sqrt{q})} = \sqrt{\left(\frac{p \pm \sqrt{(p^2 - q)}}{2}\right)} \mp \sqrt{\left(\frac{p \mp \sqrt{(p^2 - q)}}{2}\right)}.$$

Das Verbindungszeichen $\pm$ der Wurzelgrößen hängt, wie der Verlauf der Rechnung darthut, vom Verbindungszeichen der Glieder p und $\sqrt{q}$ ab. Die Vorzeichen $\pm$ bei $\sqrt{(p^2 - q)}$ entstanden durch Extraktion der Quadratwurzel aus $p^2 - q$; es gilt folglich entweder nur das obere oder nur das untere; demgemäß ist

$$(5)\quad \sqrt{(p \pm \sqrt{q})} = \sqrt{\left(\frac{p + \sqrt{(p^2 - q)}}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{p - \sqrt{(p^2 - q)}}{2}\right)} \text{ oder}$$

$$(6)\quad \sqrt{(p \pm \sqrt{q})} = \sqrt{\left(\frac{p - \sqrt{(p^2 - q)}}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{p + \sqrt{(p^2 - q)}}{2}\right)}.$$

Weil $\sqrt{(p \pm \sqrt{q})}$ positiv oder negativ genommen, den Forderungen entsprechen kann, so ist nach (5)

I. $\pm \sqrt{(p \pm \sqrt{q})} =$
$$\sqrt{\left(\frac{p + \sqrt{(p^2 - q)}}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{p - \sqrt{(p^2 - q)}}{2}\right)},$$
und diese Formel enthält die Formeln (5) und (6), auf Zahlenbeispiele bezogen, in sich.

Die in I. gefundene Formel wollen wir nun auf einige Beispiele anwenden.

1.) Es soll gefunden werden
$$\sqrt{(11 - 6\sqrt{2})}.$$

Hier ist, in Beziehung auf I.,
$$p = 11;\ \sqrt{q} = 6\sqrt{2} = \sqrt{72};\ q = 72,$$ folglich
$$\sqrt{(11 - 6\sqrt{2}} =$$
$$\sqrt{\left(\frac{11 + \sqrt{(121 - 72)}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{11 - \sqrt{(121 - 72)}}{2}\right)},$$
$$\sqrt{(11 - 6\sqrt{2})} = \sqrt{\left(\frac{11 + \sqrt{49}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{11 - \sqrt{49}}{2}\right)} =$$
$$\sqrt{9} - \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}.$$

Erhebt man $3 - \sqrt{2}$ auf die zweite Potenz, so überzeugt man sich von der Richtigkeit.

2.) Es soll bestimmt werden
$$\sqrt{(5 + 2\sqrt{6}}.$$

In Beziehung auf I. ist
$$p = 5;\ \sqrt{q} = 2\sqrt{6} = \sqrt{24};\ q = 24,$$ also
$$\sqrt{(5 + 2\sqrt{6})} = \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{(25 - 24)}}{2}\right.} + \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{(25 - 24)}}{2}\right)},$$
$$\sqrt{(5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(\frac{5 + 1}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{5 - 1}{1}\right)} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

3.) Es soll gefunden werden
$$\sqrt{(3\sqrt{3} - 2\sqrt{6})}.$$

Nach der Formel I. ist
$$p = 3\sqrt{3} = \sqrt{27};\ p^2 = 27;\ \sqrt{q} = 2\sqrt{6} = \sqrt{24};$$
$q = 24$, mithin

$$\sqrt{3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}} =$$
$$\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{(27-24)}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{(27-24)}}{2}\right)},$$
$$\sqrt{3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{2\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{12} - \sqrt[4]{3}.$$

4.) Es ist zu bestimmen
$$\sqrt{-5 + 2\sqrt{6}}.$$

Zufolge I. ist
$$p = -5; \quad \sqrt{q} = \sqrt{24}; \quad q = 24, \text{ also}$$
$$\sqrt{-5 + 2\sqrt{6}} =$$
$$\sqrt{\left(\frac{-5 + \sqrt{(25-24)}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{-5 - \sqrt{(25-24)}}{2}\right)},$$
$$\sqrt{-5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(\frac{-5+1}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{-5-1}{2}\right)} =$$
$$= \sqrt{-2} + \sqrt{-3}.$$

Es ist aber auch
$$\sqrt{-5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{-1}, \text{ und}$$
$$\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{5 - \sqrt{24}},$$
$$\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} =$$
$$\sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{(25-24)}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{(25-24)}}{2}\right)},$$
$$\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(\frac{5+1}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{5-1}{2}\right)} =$$
$$= \sqrt{3} - \sqrt{2}, \text{ folglich}$$
$$\sqrt{-5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{-1} =$$
$$\sqrt{-3} - \sqrt{-2}.$$

Bisweilen ist es auch erforderlich, aus einem Binomen von der Form

$p \pm \sqrt{-q}$ die Quadratwurzel zu ziehen.

Setzt man nun

(1) $\sqrt{p \pm \sqrt{-q}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{-z}$, wie es erforderlich ist, denn es kann nur ein Glied der Wurzel imaginär sein, so ergibt sich

$$p \pm \sqrt{-q} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{-z})^2 = x \pm 2\sqrt{-xz} - z,$$

und

$$p = x - z; \ \pm\sqrt{-q} = \pm 2\sqrt{-xz},$$

(1) $z = x - p$; $q = 4xz$. Hierein den Werth von z aus (2) gesetzt,

$q = 4x(x - p) = 4x^2 - 4px$, zu beiden Theilen dieser Gleichung p^2 addirt,

$$4x^2 - 4px + p^2 = p^2 + q,$$

$$2x - p = \sqrt{(p^2 + q)},$$

(3) $x = \frac{p + \sqrt{(p^2 + q)}}{2}$, und wenn dieser Werth in (2) gesetzt wird,

(4) $z = -p + \frac{p + \sqrt{(p^2 + q)}}{2} = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + q)}}{2}$.

Die in (3) und (4) gefundenen Werthe endlich in (1) genommen, geben

II. $\sqrt{(p \pm \sqrt{-q})} =$

$$\sqrt{\left(\frac{p + \sqrt{(p^2 + q)}}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{+p - \sqrt{(p^2 + q)}}{2}\right)}.$$

Zur Anwendung dieser Formel sollen hier noch einige Zahlenbeispiele folgen.

5.) Es soll gefunden werden

$$\sqrt{(2 - 4\sqrt{-2})}.$$

In Beziehung auf II. ist

$p = 2$; $\sqrt{-q} = \sqrt{-32}$; $q = 32$ und

$\sqrt{(2 - 4\sqrt{-2})} =$

$$\sqrt{\left(\frac{2 + \sqrt{(4 + 32)}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{2 - \sqrt{(4 + 32)}}{2}\right)},$$

$$\sqrt{(2 - 4\sqrt{-2})} = \sqrt{\left(\frac{2 + \sqrt{36}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{2 - \sqrt{36}}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{4} - \sqrt{-2} = 2 - \sqrt{-2}.$$

6.) Es ist zu finden

$$\sqrt{(2 - 2\sqrt{-15})}.$$

Nach II. ist

$p = 2$; $\sqrt{-q} = 2\sqrt{-15} = \sqrt{-60}$; $q = 60$, und

$$\sqrt{(2 - 2\sqrt{-15})} = \sqrt{\left(\frac{2 + \sqrt{(4 + 60)}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{+2 - \sqrt{(4 + 60)}}{2}\right)},$$

$$\sqrt{(2 - 2\sqrt{-15})} = \sqrt{\left(\frac{2 + 8}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{+2 - 8}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

Aufgaben.

a) Reinquadratische Gleichungen zur Reduktion.

1) $2mx^2 = 4a^2 - 3b.$

2) $4a^2x^2 - 4bc = 3bx'' + c^3d.$

3) $2a^2b^2 - 16a^2b^2x^2 + 5ab^2c - 9b^2c^2x^2 =$
$12b^2c^2 + 24ab^2cx^2.$

4) $9f^2g^2x^2 + 27abm^2n^4 = 9m^3n^4 + 12cdfgx^2 -$
$- 4c^2d^2x^2.$

5) $6a^2b^2m^3 = a^2m^6 - ab^2x^2 + 9a^2b^4x^2 + bcx^2.$

6) $3a^3b^2mx^2 + a^4b^5 - 1\frac{1}{2}a^2b^6 = \frac{1}{6}a^6b^4 - 4\frac{1}{2}bnx^2.$

7) $2\frac{1}{5} - 3x^2 = 1\frac{3}{5}\sqrt{3} - 1\frac{1}{3}x^2\sqrt{5}.$

8) $19x^2\sqrt{5} + 24\sqrt{2} = 20x^2\sqrt{3} + 77\sqrt{\frac{1}{5}}.$

9) $84\frac{1}{2}x^2\sqrt{\frac{1}{10}} - 18\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{10}} = 12x^2 - 3\sqrt{3}.$

b) Vollständig-quadratische Gleichungen zur Reduktion.

1) $x^2 + 2bx + b^2 = c^2.$

2) $x^2 - 6ax + 9a^2 = b.$

3) $9x^2 - 4f = -24mnx - 16m^2n^2.$

4) $24cfx - 4x^2 - 36c^2f2 + d = 0.$

5) $(6x + 4c)(6x - 4c) = 84bx - 49b^2.$

6) $(2m + 3bx)(2m - 3bx) = c(c - 6bx).$

7) $18m[2m(9m^2 - 6mx + x^2) - 5(x + 4)] = 25(x + 4)^2 + 81m^2$.

8) $(ax^2 - 2ax\sqrt{a} + a^2)(\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}) = (bx^2 + 2bx\sqrt{b} + b^2)(\sqrt{b} - 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{a})$.

c) Unvollständig-quadratische Gleichungen zur Reduktion.

1) $x^2 - x = 30$. 2) $x^2 + x = 56$.

3) $x^2 - x = 110$.

4) $x^2 - 1\frac{5}{12}x = 15\frac{5}{6}$.

5) $x^2 - 0{,}54x - 8{,}8075 = 0$.

6) $x^2 + 7x = - 12$.

7) $x^2 + 8\frac{1}{6}x = - 16\frac{1}{3}$.

8) $x^2 + 11\frac{21}{88}x = - 30$.

9) $x^2 - 17x = - 72$.

10) $x^2 - 15\frac{3}{4}x = - 58\frac{61}{64}$.

11) $x^2 - 6\frac{13}{20}x = - 1\frac{3}{5}$.

12) $x^2 - 2ax = 3a^2$.

13) $x^2 - 5b^2 = 4bx$.

14) $x^2 - 7mnx = 8m^2n^2$.

15) $x^2 + 4\frac{2}{3}a^3cx - 16\frac{1}{3}a^6c^2 = 0$.

16) $x^2 + 4a^mx(m + n)^p = - 3a^{2m}(m + n)^{2p}$.

17) $x^2 = 4x + 7$.

18) $x^2 + 15x = - 13$.

19) $x^2 + 2x\sqrt{3} = 9$.

20) $x^2 + 3x\sqrt{5} - 90 = 0$.

21) $x^2 + 5x\sqrt{6} = 144$.

22) $x^2 + 5ax\sqrt{b} = 36a^2b.$

23) $x^2 + 6a^mb^2x\sqrt{c} = 7a^{2m}b^4c.$

24) $x^2 + 5ab^{m+1}x\sqrt{m} = -4a^2b^{2m+2}m.$

25) $x^2 - 2x\sqrt[4]{5} = 15\sqrt{5}.$

26) $x^2 - 10a^2bx\sqrt[4]{2} + 21a^4b^1\sqrt{2} - 0.$

27) $x^2 + 2x\sqrt[2p]{m} - 15\sqrt[p]{m} = 0.$

28) $x^2 + 4a^rx\sqrt[2r]{n} = 21a^{2r}\sqrt[r]{n}.$

29) $x^2 - x\sqrt{a} - x\sqrt{b} = -\sqrt{ab}.$

30) $x^2 - x\sqrt{c} + x\sqrt{d} = \sqrt{cd}.$

31) $x^2 = 4nx\sqrt{n} - 2mx\sqrt{m} + 8mn\sqrt{mn}.$

32) $x^2 + mx\sqrt{(a+b)} - 2pmx\sqrt{(a-b)} =$
$2pm^2\sqrt{(a^2-b^2)}.$

33) $x^2 - 2ax = b^2 - a^2.$

34) $x^2 - 6mx = 16n^2 - 9m^2.$

35) $x^2 - 6x(a+b) + 3x(b+c) = 18(a+b)(b+c)$
$- 8(a+b)^2 + 18(b+c)^2.$

36) $x^2 - 6x = -11.$

37) $x^2 + 4x = -13.$

38) $x^2 - 3x = -9.$

39) $x^2 - 3x\sqrt{3} + 2x\sqrt{5} = 34.$

40) $x^2 + 4x\sqrt{3} = 22\sqrt{15} + 23 + 6x\sqrt{5}.$

41) $x^2 - 5x + 8\sqrt{5} = 2x\sqrt{5} + 34.$

42) $8\tfrac{1}{6}x + 2x\sqrt{7} - x^2 = 5\tfrac{5}{6}\sqrt{7} - 4\tfrac{2}{3}.$

43) $x^2 + 9x = 9x\sqrt{\tfrac{1}{2}} + 48\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 23.$

44) $x^2 - 5x = 2x\sqrt{-5} - 46 - 8\sqrt{-5}.$

45) $x^2 + 61 + 27\sqrt{-1} = 15x + 4x\sqrt{-1}$.

46) $24x^2 + 2x = 15$.

47) $12x^2 = -124x - 316\frac{1}{4}$.

48) $2b^2x^2 = \frac{13}{3}abx - 2a^2$.

49) $6c^2d^2x^2 + a^m b^{2p+1}cdx = \frac{10}{3}a^{2m}b^{4p+2}$.

50) $1\frac{7}{8}bdx^2\sqrt{10} = \frac{3}{4}adx\sqrt{6} + 2\frac{1}{2}bcx\sqrt{30} - 3ac\sqrt{2}$.

51) $c^2d^2x^2 + 4bcdx = 4acdx + 5b^2 + 2ab - 3a^2$.

52) $8ax\sqrt{m} - 6amx\sqrt{mn} + 4a^2mx^2 = 32 - 2m^2n$.

53) $\frac{2}{3}nx\sqrt{dm} - \frac{1}{3}abnx\sqrt{m} + \frac{1}{2}mnx^2\sqrt{mn} - cdmx\sqrt{n}$
$= 1\frac{1}{3}cd\sqrt{d} - \frac{2}{3}abcd - 1\frac{1}{4}m^2nx + \frac{5}{6}abm\sqrt{n}$
$- 1\frac{2}{3}m\sqrt{dn}$.

54) $x^4 - 2mx^2 = c$.

55) $x^4 - 8x^2 = 36$.

56) $x^4 + ax^2 - b = 0$.

57) $x^4 + 35x^2 = -4$.

58) $x^6 - 2ax^3 = b$.

59) $x^6 + 5bx^3 = -c$.

60) $x^2 - 5x^3 = 30$.

---

2) Gleichungen des zweiten Grades mit mehrern unbekannten Größen zur Reduktion.

Die allgemeinste Form zweier zusammengehörender quadratischer Gleichungen mit zwei unbekannten Größen ist

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = m \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y = m'. \end{cases}$$

Die Bestimmung der Werthe der unbekannten Größen zweier Gleichungen, von der Form der vorstehenden, oder auch

dreier und mehrer ähnlicher zusammengehörender, führt sich zunächst darauf zurück, aus den gegebenen Gleichungen eine abzuleiten, in der nur noch eine unbekannte Größe enthalten ist. Die hierbei anzuwendenden Eliminationsmethoden sind eben dieselben, deren wir uns bei der Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit mehrern unbekannten Größen bedient haben, wenn die zu eliminirende Größe x wie in den folgenden Gleichungen

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = m \\ a'x^2 + b'y^2 = m' \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = m \\ ax + by = m' \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = m \\ b'xy + c'y^2 + dx + ey = m' \end{cases}$$ u. s. f. vorkommt, oder überhaupt in beiden Gleichungen entweder nur in der ersten oder zweiten, oder wenigstens in der einen Gleichung nur in der ersten Potenz enthalten ist. Es sind aber diese Methoden nicht mehr ohne besondere Wendungen zu gebrauchen, oder man kann sich dann nur der Elimination durch Substitution bedienen, wenn die zu eliminirende Größe in beiden Gleichungen in der ersten und zweiten Potenz enthalten ist. Ehe wir die Elimination einer unbekannten Größe x aus zwei zusammengehörenden Gleichungen von der letztgenannten Beschaffenheit anführen, wollen wir erst einige zusammengehörende quadratische Gleichungen mit zwei unbekannten Größen auflösen, bei welchen die Eliminationsmethoden angewendet werden können, deren wir uns bei der Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit mehrern unbekannten Größen bedient haben.

1) $$\begin{cases} 3x^2 - z^2 = 26 \\ 2x^2 + 5z^2 = 295. \end{cases}$$

Die erste Gleichung mit 2, die letztere mit 3 multiplizirt und das erste Produkt vom letztern abgezogen, gibt

$$17z^2 = 833,$$

$z^2 = 49$; $y = \pm 7$; und wenn der Werth für z^2 in die erste Gleichung gesetzt wird,

$$3x^2 = 75; \ x = \pm 5;$$

es ist also in beiden Gleichungen entweder

$x = 5$ und $y = 7$, oder

$x = -5$ und $y = -7$.

2) $\begin{cases} xy = m \\ ax + by = n. \end{cases}$

Den Werth von y aus der ersten Gleichung in die zweite gesetzt, gibt

$$ax + \frac{bm}{x} = n,$$

$$x^2 = \frac{nx}{a} - \frac{bm}{a},$$

$$x = \frac{n \pm \sqrt{(n^2 - 4abm)}}{2a}.$$

Durch Substitution dieses Werthes in die zweite Gleichung wird

$$by = n - \frac{n \pm \sqrt{(n^2 - 4abm)}}{2},$$

$$y = \frac{n \mp \sqrt{(n^2 - 4abm)}}{2b}.$$

Setzt man aber den für x gefundenen Werth in die erste Gleichung, so wird, wenn dieselbe zuvor mit x dividirt ist,

$y = \frac{2am}{n \pm \sqrt{(n^2 - 4abm)}}$, welcher Werth mit dem zuerst gefundenen noch nicht übereinstimmt; schafft man jedoch die Wurzelgröße aus dem Nenner weg, so ergibt sich

$$y = \frac{2am[n \mp \sqrt{(n^2 - 4abm)}]}{[n \pm \sqrt{(n^2 - 4abm)}][n \mp \sqrt{(n^2 - 4abm)}]},$$

$$y = \frac{2am[n \mp \sqrt{(n^2 - 4abm)}]}{n^2 - (n^2 - 4abm)} =$$

$$= \frac{n \mp \sqrt{(n^2 - 4abm)}}{2b}.$$

3) $\begin{cases} xy = m \\ ax^2 + by^2 = n. \end{cases}$

Die erste Gleichung zur zweiten Potenz erhoben, mit a

multiplizirt und die erhaltene Gleichung von der zweiten, wenn diese zuvor mit y^2 multiplizirt wurde, abgezogen, gibt

$$by^4 = ny^2 - am^2,$$

$$y^2 = \frac{n \pm \sqrt{(n^2 - 4abm)}}{2b},$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{n \pm \sqrt{(n^2 - 4abm)}}{2b}\right)},$$ und wenn der Werth für y^2 in die zweite gegebene Gleichung gesetzt wird,

$$ax^2 = \frac{n \mp \sqrt{(n^2 - 4abm^2)}}{2},$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{n \mp \sqrt{(n^2 - 3abm^2)}}{2a}\right)}.$$

4) $\left\{\begin{array}{l} 3xy + y^2 = 28 \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = -39. \end{array}\right.$

Aus der ersten Gleichung folgt

(1) $x = \frac{28 - y^2}{3y}$, aus der zweiten

$$x^2 = -2xy + 3y^2 - 39,$$

$x = -y \pm \sqrt{(4y^2 - 39)}$, und aus der Vergleichung der Werthe für x,

$$\frac{28 - y^2}{3y} = -y \pm \sqrt{(4y^2 - 39)},$$

$$28 - y^2 = -3y^2 \pm 3y\sqrt{(4y^2 - 39)},$$

$$(28 + 2y^2)^2 = 9y^2(4y^2 - 39),$$

$$y^4 = \tfrac{463}{32}y^2 + \tfrac{784}{32},$$

$$y^2 = \frac{463 \pm \sqrt{(214369 + 100352)}}{64},$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{(463 \pm 561)}}{8},$$

$$y' = \pm \tfrac{32}{8} = \pm 4,$$

$$y'' = \pm \frac{\sqrt{(463 - 561)}}{8} = \pm \frac{\sqrt{-98}}{8}.$$

Den Werth von y in die Gleichung (1) gesetzt, so ergibt sich auch

$$x = \frac{28 - \frac{(463 \pm 561)}{64}}{\frac{\pm 3\sqrt{(463 \pm 561)}}{8}} = \frac{28.64 - 463 \mp 561}{\pm 24\sqrt{(463 \pm 561)}},$$

$$x' = \frac{1792 - 463 - 561}{24 . \sqrt{(463 + 561)}} = \frac{768}{24. \pm 32} = \tfrac{768}{768} = \pm 1,$$

$$x'' = \frac{1792 - 463 + 561}{-24 . \sqrt{(463 - 561)}} = \frac{1890}{-24. \pm \sqrt{-98}} = \mp \frac{315}{4\sqrt{-98}}.$$

Aus den vorstehenden Auflösungen wird man zur Genüge die Elimination einer unbekannten Größe aus zwei zusammengehörenden Gleichungen, die auf eine Endgleichung vom zweiten Grade führen, erkennen, wenn die zu eliminirende Größe in beiden Gleichungen in der ersten Potenz, oder wenigstens in einer Gleichung nur in der ersten Potenz vorkommt, und wir wollen jetzt die Methoden berühren, deren man sich zu bedienen hat, wenn die zu eliminirende Größe in beiden Gleichungen in der ersten und zweiten Potenz enthalten ist. Die Gleichungen, an denen wir diese Eliminationsmethoden erläutern wollen, mögen sein

$$5) \begin{cases} x^2 + 3xy - 2y^2 = -32 \\ 4x^2 - 2xy + 3y^2 = 55. \end{cases}$$

Der am klarsten vorliegende Weg zur Elimination der unbekannten Größe x (dasselbe gilt auch für y) ist wohl der, den Werth von x aus der einen Gleichung zu bestimmen und diesen in die andere statt x zu setzen, also die Elimination durch Substitution zu verrichten.

Aus der ersten Gleichung folgt für x

$$x^2 = -3xy + 2y^2 - 32,$$

$$(1)\ x = \frac{-3y \pm \sqrt{(17y^2 - 128)}}{2}.\ \text{d. g.}$$

$$2xy = -3y^2 \pm y\sqrt{(17y^2 - 128)},$$

$$4x^2 = 9y^2 \mp 6y\sqrt{(17y^2 - 128)} + 17y^2 - 128$$
$$= 26y^2 - 128 \mp 6y\sqrt{(17y^2 - 128)},$$ und wenn diese Werthe für $2xy$ und $4x^2$ in die zweite gegebene Gleichung gesetzt werden

$$32y^2 \mp 7y\sqrt{(17y^2 - 128)} = 183,$$

$$32y^2 - 183 = \pm 7y\sqrt{(17y^2 - 128)}.$$ Die Gleichung zum Quadrat erhoben

$$1024y^4 - 11712y^2 + 33489 = 833y^4 - 6272y^2,$$

$$191y^4 = 5440y^2 - 33489,$$

$$y^4 = \tfrac{5440}{191}y^2 - \tfrac{33489}{191},$$

$$y = \pm\sqrt{\left[\frac{2720 \pm \sqrt{1002001}}{191}\right]} =$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{2720 \pm 1001}{191}\right)},$$

$$y' = \pm\sqrt{\frac{2720 + 1001}{191}} = \pm 19{,}483\ldots,$$

$$y'' = \sqrt{\left(\frac{2720 - 1001}{191}\right)} = 3.$$

Den Werth für x in die Gleichung (1) gesetzt, gibt

$$x = \frac{\pm 3\sqrt{\left(\frac{2720 \pm 1001}{191}\right)} \pm \sqrt{\left[\frac{17}{191}(2720 \pm 1001) - 128\right]}}{2},$$

$$x' = \frac{3\sqrt{\frac{3721}{191}} + \sqrt{\left(\frac{17}{191} \cdot \frac{3721}{191} - 138\right)}}{2} = 2{,}236,$$

$$x'' = \frac{-3.3 - \sqrt{(17 \cdot 9 - 128)}}{2} = -7.$$

Eine allgemeine Eliminationsmethode für Gleichungen des zweiten Grades, die der letztern Substitutionsmethode fast immer vorzuziehen ist, ist nachstehende:

Die gegebenen Gleichungen mögen die Form

$$(2)\ \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + m = 0 \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + m' = 0 \end{cases}$$ haben und aus beiden zuerst die unbekannte Größe x zu eliminiren sein.

Weil x zuerst eliminirt werden soll, so ist y als bekannte Größe zu behandeln. Bezeichnet man deshalb in den gegebenen Gleichungen

$cy^2 + m$ durch r,

$c'y^2 + m'$ durch r', so werden die Gleichungen zu

$$(3)\ \begin{cases} ax^2 + bxy + r = 0 \\ a'x^2 + b'xy + r' = 0. \end{cases}$$ Die erste dieser Gleich-

ungen mit a', die zweite mit a multiplizirt und das letztere Produkt vom erstern abgezogen, gibt

$$aa'x^2 + a'bxy + a'r = 0$$
$$aa'x^2 + ab'xy + ar' = 0$$

$$(4)\quad xy(a'b - ab') + (a'r - ar') = 0.$$

Von den Gleichungen unter (3) die erste mit r', die zweite mit r multiplizirt und das letztere Produkt vom erstern abgezogen, so wird

$$ar'x^2 + br'xy + rr' = 0$$
$$a'rx^2 + b'rxy + rr' = 0$$

$$x^2(ar' - a'r) + xy(b'r - b'r) = 0, \text{ oder}$$

$$x(ar' - a'r) + y(br' - b'r) = 0.$$ Hieraus und aus der Gleichung unter (4) folgt

$$x = \frac{ar' - a'r}{a'b - ab'};\quad x = \frac{y(b'r - br')}{ar' - a'r}, \text{ d. g.}$$

$$\frac{ar' - a'r}{a'b - ab'} = \frac{y(b'r - br')}{ar' - a'r},$$

$$y(b'r - br')(a'b - a'b - ab') = (ar' - a'r)^2.$$

Hierein für r und r' die Werthe gesetzt, gibt

$$y[b'(cy^2 + m) - b(c'y^2 + m')](a'b - ab')$$
$$= [a(c'y^2 - m') - a'(cy^2 + m)]^2.$$

Diese Gleichung gehörig entwickelt, so erhält man die Form

$Ay^4 + By^2 + C = 0$, also eine Gleichung, aus der sich die Werthe für y ableiten lassen. (Man sehe die Auflösung der 19ten Aufgabe der quadratischen Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen.)

Nachdem die Werthe für y gefunden sind, können auch die für x bequem abgeleitet werden.

Die eben vorgetragene Eliminationsmethode ist als eine allgemeine anzusehen, mittels der immer eine unbekannte Größe aus zwei zusammengehörenden quadratischen Gleichungen eliminirt werden kann. Wir werden weiter unten sogar zeigen, daß diese Eliminationsmethode selbst dann noch anwendbar ist, wenn die Gleichungen, aus denen eine unbekannte Größe eliminirt werden soll, von einem höhern als vom zweiten Grade sind.

Die hier vorgetragene Eliminationsmethode wollen wir zunächst auf die unter 5) gegebenen Gleichungen

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - 2y^2 = -32 \\ 4x^2 - 2xy + 3y^2 = 55, \end{cases}$$ zur Elimination der unbekannten Größe x anwenden.

Die vorstehenden Gleichungen geben auch

$$5) \begin{cases} x^2 + 3xy - 2y^2 + 32 = 0 \\ 4x^2 - 2xy + 3y^2 - 55 = 0. \end{cases}$$ Die erste Gleichung mit 4 multiplizirt und die letztere davon abgezogen, gibt

$$\begin{array}{l} 4x^2 + 12xy + (128 - 8y^2) = 0 \\ 4x^2 - 2xy + (3y^2 - 55) = 0, \\ - \quad + \quad - \\ \hline \end{array}$$

$$(6)\ 14xy + 183 - 11y^2 = 0;$$ ferner, wenn die erste Gleichung unter (5) mit $(3y^2 - 55)$, die zweite mit $(32 - 2y^2)$ multiplizirt und das letztere Produkt vom erstern abgezogen wird,

$$x^2[3y^2 - 55 - 128 + 8y^2] + xy[9y^2 - 165 + 64 - 4y^2] = 0,$$

durch x dividirt,

$$x(11y^2 - 183) + y(5y^2 - 101) = 0.$$ Hieraus und aus (6) folgt nun

$$x = \frac{11y^2 - 183}{14y}; \quad x = \frac{y(5y^2 - 101)}{11y^2 - 183},$$ d. h.

$$\frac{11y^2 - 183}{14y} = \frac{y(5y^2 - 101)}{11y^2 - 183},$$

$$14y^2(5y^2 - 101) = (11y^2 - 183)^2,$$ welche Gleichung wir bereits oben gefunden haben.

Die oben vorgetragene Eliminationsmethode gilt auch dann noch, wenn die zu eliminirende Größe x in der einen von den gegebenen Gleichungen nur in der ersten Potenz enthalten ist.

Um dies zu zeigen, wollen wir aus den Gleichungen

$$6) \begin{cases} x + y = m \\ ax^2 + bxy + cy = n \end{cases}$$ die Größe x eliminiren.

Die erste Gleichung mit ax multiplizirt und das Produkt von der zweiten abgezogen, gibt

$$ax^2\ a+ ax(y - m) = 0$$
$$\underline{ax + 6xy + cy^2 - n = 0}$$

(1) $x[by - a\,(y-m)] + cy^2 - n = 0$, und wenn die erste gegebene Gleichung mit $(cy^2 - n)$ und die zweite mit $(y - m)$ multiplizirt und das erste Produkt vom letztern abgezogen wird,

$$ax^2(y-m) + bxy(y-m) + (cy^2-n)(y-m) = 0,$$
$$\underline{x(cy^2 - n) + (cy^2 - n)(y - m)}$$
$$ax^2(y-m) + bxy(y-m) - x(cy^2-n) = 0, \text{ oder}$$
$$ax(y-m) + by(y-m) - (cy^2-n) = 0.$$

Hieraus und aus (1) folgt

$$x = \frac{(cy^2 - n) - by(y - m)}{a(y - m)},$$

$$x = \frac{cy^2 - n}{a(y-m) - by} \text{ d. g.}$$

$$\frac{(cy^2 - n) - by(y - m)}{a(y - m)} = \frac{cy^2 - n}{a(y - m) - by},$$

welche Gleichung nur noch y enthält.

Obschon bei der Elimination einer unbekannten Größe aus zwei Gleichungen, welche in beiden oder nur in einer in der ersten und zweiten Potenz oder wenigstens in einer Gleichung als Faktor bei der andern unbekannten Größe steht, mannichfaltige durch die Gleichungen gebotene Abkürzungen angewendet werden können, deren einige in den Auflösungen sind: so wird man doch mit den vorbeschriebenen Eliminationsmethoden immer auskommen.

Sind drei oder noch mehre Gleichungen gegeben, in denen eben so viel unbekannte Größen vorkommen, so ist in eben der Form, als bei den Gleichungen des ersten Grades mit mehrern unbekannten Größen, aus diesen eine unbekannte Größe nach der andern bis auf eine zu eliminiren.

Nachdem wir das Vorzüglichste über die Art der Elimination einer unbekannten Größe aus zwei Gleichungen, welche in einer dieser Gleichungen oder in beiden, in der ersten und zweiten Potenz oder wenigstens in einer Gleichung als Faktor der andern unbekannten Größe, in der andern aber einfach vorkommt, gesagt haben, wollen wir jetzt einige Untersuchungen über

den Grad der Gleichung anstellen, die durch Elimination einer unbekannten Größe aus zwei Gleichungen erhalten wird.

Durch Elimination einer unbekannten Größe aus den Gleichungen

$\begin{cases} ax^2 + by^2 = m \\ a'x^2 + b'y^2 = m' \end{cases}$ erhält man eine reinquadratische Gleichung, und zwar deshalb, weil die gegebenen Gleichungen auf die Form von Gleichungen des ersten Grades gebracht werden können, wenn man $x^2 = z$ und $y^2 = w$ setzt.

Sind die Gleichungen

$\begin{cases} ax + by = m \\ xy = n \end{cases}$ gegeben, so folgt aus der ersten Gleichung

$x = \frac{m}{a} - \frac{b}{a}y$, oder es hat der Werth von x die Form

$x = f + gy$. Setzt man diesen Werth in die zweite Gleichung, so wird diese zu

$y(f + gy) = n$, oder

$fg + gy^2 = n$. Die quadratische Endgleichung wird also durch die zweite Gleichung

$xy = n$ bedingt, weil der Werth von x durch zwei Glieder ausgedrückt ist, von welchen das eine y selbst enthält.

Von den Gleichungen

$\begin{cases} ax^2 + by^2 = m \\ cx + dy = n \end{cases}$ gibt die zweite für x die Form

$x = f + gy$; wenn man diesen Werth statt x in die erste setzt, so hat die Endgleichung die Form

$Ay^2 + By + C = 0$.

Die zweite von den Gleichungen

$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + m = 0 \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + m' = 0 \end{cases}$ gibt für x die Form

$x = yf \pm \sqrt{(g + hy^2)}$, und wenn dieser Werth in die erste Gleichung gesetzt wird, erhält diese die Form

$ky^2 \pm ly\sqrt{(g + hy^2)} + n = 0$. Um hieraus das Wurzelzeichen zu entfernen, ist die Gleichung auf die Form

$ky^2 + n = \mp ly\sqrt{(g + hy^2)}$ zu bringen und zu quadriren, woraus sich nach gehöriger Vereinigung die Form

$Ay^4 + By^2 + m^2 = 0$ findet.

Betrachten wir endlich die allgemeinste Form von zwei zusammengehörenden quadratischen Gleichungen mit zwei unbekannten Größen

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = m \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y = m'. \end{cases}$$

Aus der zweiten Gleichung x entwickelt, gibt die Form

$x = (fy + g) \pm \sqrt{(h + ky + ly^2)}$ und wenn man diesen Werth statt x in die erste Gleichung setzt, die Form

$$ny^2 + py \pm (ry + s)\sqrt{(h + ky + ly^2)} + q = 0.$$

Gibt man dieser Gleichung die Gestalt

$$ny^2 + py^2 + q = \mp (ry + s)\sqrt{(h + ky + ly^2)}$$

und erhebt nun auf die zweite Potenz, so erscheint nach gehöriger Vereinigung die Form

$$Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E = 0.$$

Aus den vorstehenden Betrachtungen lassen sich nun folgende Schlüsse ziehen:

1) Haben zwei zusammengehörende Gleichungen die Form

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = m \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y = m', \end{cases}$$ so

so ist die durch Elimination einer Größe erzeugte Endgleichung eine Gleichung des vierten Grades von der Form

$$Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E = 0.$$

2) Haben zwei zusammengehörende Gleichungen die Form

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = m \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = m', \end{cases}$$ so ist die durch Elimination einer unbekannten Größe erlangte Endgleichung von der Form

$$Ay^4 + By^2 + C = 0.$$

3) Haben zwei Gleichungen die Form

$$\begin{cases} ax + by = m \\ a'x^2 + by^2 = m' \end{cases}$$ oder

$$\begin{cases} ax + by = m \\ xy = m' \end{cases}$$ oder

$$\begin{cases} ax + by = m \\ a'x^2 + b'xy + c'y = m', \end{cases}$$ oder ist die zu eliminirende Größe x in einer Gleichung nur in der ersten Potenz enthalten, so ist die durch Elimination hervorgebrachte Endgleichung von der Form

$$Ay^2 + By + C = 0.$$

4) Sind endlich die Gleichungen von der Form

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = c \\ a'x^2 + b'y^2 = c', \end{cases}$$ so ist die durch Elimination einer Größe erzeugte Endgleichung von der Form

$$Ay^2 + B = 0.$$

Die vorstehenden Sätze gelten nur für ein solches Paar von Gleichungen, wo die eine nicht durch die andere erniedrigt werden kann, oder wo die eine Gleichung nicht von der andern abhängt. Hat man z. E. die Gleichungen

$$\begin{cases} x + y = m \\ x^2 - y^2 = n, \end{cases}$$ so wird die durch Elimination erzeugte Endgleichung nicht vom zweiten sondern nur vom ersten Grade sein, und zwar deshalb, weil, wenn mit der ersten Gleichung die zweite dividirt wird, sich ergibt

$$\frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{m}{n}, \text{ d. i. } x - y = \frac{n}{m},$$ und diese Gleichung statt der zweiten $x^2 - y^2 = n$ als gegeben anzusehen ist; die durch Elimination einer Größe erzeugte Endgleichung ist also nur deshalb nicht vom zweiten Grade, weil die zweite Gleichung die erste als Faktor hat.

Aus dem eben erwähnten Grunde ist die durch Elimination einer unbekannten Größe erzeugte Endgleichung der Gleichungen

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = m \\ x^3 + y^3 = n \end{cases}$$ nicht etwa vom sechsten sondern nur vom vierten Grade, weil, wenn die zweite Gleichung durch die erste dividirt wird, sich

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2} = \frac{n}{m},$$

$$\frac{x^2 - xy + y^2}{x - y} = \frac{n}{m}, \text{ oder}$$

$$x^2 - xy + y_2 = \frac{nx}{m} - \frac{ny}{m}$$ ergibt und diese Gleichung statt der zweiten als gegeben anzusehen ist.

Angesetzte Aufgaben
zur Reduktion der Gleichungen des zweiten Grades mit mehrern unbekannten Größen.

1) $\begin{cases} 5x^2 - 7y^2 = 17 \\ 3x^2 + 2y^2 = 35. \end{cases}$

2) $\begin{cases} mx^2 + ny^2 = a \\ m'x^2 + n'y^2 = b. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 81 \\ xy = 20. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x + y = b \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x + y = b \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = b. \end{cases}$

9) $\begin{cases} mx + ny = a \\ pxy = b. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 5x + 3z = 15 \\ 7xz = 18. \end{cases}$

11) $\begin{cases} ax^2 + by^2 = m \\ cxy = n. \end{cases}$

12) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 97 \\ 7xy = 245. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a \\ xy = b. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a \\ x + y = b. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^3 - y^3 = a \\ x - y = b. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x^3 + y^3 = a \\ x + y = b. \end{cases}$

17) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x + y} = 1\frac{7}{8} \\ \dfrac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{15}{16}. \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = a \\ x^2 - y^2 = b. \end{cases}$

19) $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = m \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = m'. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y^2 = b \\ y^2 - x^2 = c. \end{cases}$

21) $\begin{cases} x + y + z = m \\ xy = n \\ yz = p. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x + y = 3 \\ yz = -6 \\ xy = 2. \end{cases}$

23) $$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+z} = a \\ \dfrac{xz}{z+y} = b \\ \dfrac{yz}{x+y} = c. \end{cases}$$

24) $$\begin{cases} \dfrac{2xz}{x-z} = -7 \\ \dfrac{3yz}{3y-2z} = 5\tfrac{1}{4} \\ \dfrac{5xy}{7x-3y} = -1\tfrac{3}{11}. \end{cases}$$

Aufgaben für Gleichungen des zweiten Grades mit mehrern unbekannten Größen.

1) Wenn man den sechsten Theil einer Zahl mit ihrem achten Theile multiplizirt, erhält man das Produkt 12. Welche Zahl ist dies?

2) Es gibt eine Zahl, von der das Produkt aus ihrem dritten und vierten Theile noch um 36 größer ist, als ihr Vierfaches. Welche Zahl ist dies?

3) Ich kenne eine Zahl von der Beschaffenheit, daß wenn man den fünften Theil derselben von 12 abzieht und ihren zehnten Theil zu 12 addirt, das Produkt aus dieser Summe und jener Differenz 12 beträgt. Welche Zahl ist dies?

4) Eine Zahl ist so beschaffen, daß wenn man zu ihr a addirt und b von ihr subtrahirt, das Produkt der entstehenden Zahlen gleich m ist. Durch welchen Ausdruck wird diese Zahl bestimmt?

5) Wenn ich von einer gewissen Zahl 4 wegnehme und 5 zu ihr addire, so gibt jene Differenz mit dieser Summe multiplizirt 112. Welche Zahl hat diese Eigenschaft?

6) Einst kaufte ich für 8 Thlr. eine gewisse Menge Zeug und

gab für jede Elle so viel Groschen, als es Ellen weniger 4 waren. Wie viel Ellen Zeug kaufte ich und wie viel Groschen kostete die Elle?

7) Die Summe der ersten Potenzen zweier Zahlen beträgt a und die der zweiten Potenzen b. Durch welche Formeln werden diese Zahlen ausgedrückt.

8) Die Differenz zweier Zahlen ist 3 und die Summe ihrer Quadrate 89. Welche Zahlen sind dies?

9) Das Produkt zweier Zahlen ist a und die Summe der Quadratwurzeln eben dieser Zahlen b. Durch welche Formeln werden diese Zahlen ausgedrückt?

10) Die Quadrate zweier Zahlen stehen in dem Verhältnisse m : n; addirt man aber zur ersten a und zur zweiten b, so verhalten sich die Quadrate dieser Summen wie p : q. Welche Formeln drücken diese Zahlen aus?

11) Die Physik lehrt, daß wenn Körper im luftleeren Raume fallen, sich die durchfallenen Räume wie die Quadrate der dazu erforderlichen Zeiten verhalten, d. h. wenn ein Körper 2 Sekunden lang und ein zweiter 3 Sekunden lang fiel, so verhalten sich die durchfallenen Räume wie $2^2 : 3^2$ oder wie 4 : 9. Wenn man nun den Weg, den ein freifallender Körper im luftleeren Raume nach der ersten Sekunde durchlief, mit g bezeichnet, wie groß ist alsdann der Weg, den er in t Sekunden durchlaufen wird?

12) Der Raum, den ein sich selbst überlassener Körper in der ersten Sekunde seines freien Falles in vertikaler Richtung durchläuft, beträgt ziemlich genau für Dresden $17\frac{2}{3}$ *) Fuß. Wie groß ist demgemäß der Weg, den ein Körper nach $6\frac{3}{4}$ Sekunden zurückgelegt hat?

13) Die Länge des Sekundenpendels für Dresden beträgt ziemlich genau $42\frac{1}{10}$ Zoll Dresdener Maß. Wie lange dauert

*) Für Oerter, deren Breite zwischen 0 und 90 Grad liegt, kann man diesen Fallraum im Mittel zu 15,028 Pariser Fuß annehmen; am Aequator beträgt aber dieser Fallraum 15,029 Pariser Fuß.

demgemäß die Schwingung eines Pendels von 87 Fuß $8\frac{1}{2}$ Zoll Länge, da sich die Längen der Pendel wie die Quadrate der Schwingunszeiten verhalten, unter der Voraussetzung, daß die Schwingungen in Kreisbogen, kleiner als 15 Grad, erfolgen? *)

14) Eine Erbschaft von 1200 Thlr. sollte unter eine gewisse Menge Erben zu gleichen Theilen vertheilt werden. Noch ehe die Vertheilung erfolgen konnte, starb einer der Erben und jedem der übrigen fielen dadurch 400 Thlr. mehr zu als es vor dem Ableben dieses der Fall gewesen sein würde. Wieviel Erben waren anfänglich da?

15) Eine Linie von 20 Zoll ist in 3 Theile mehr getheilt, als eine Linie von 15 Zoll, und ein Theil von der ersten und ein Theil von der zweiten machen zusammen $5\frac{1}{2}$ Zoll. In wieviel gleiche Theile ist jede Linie getheilt?

16) Wenn man zu zwei Zahlen ein und dieselbe Zahl m addirt, so ist das Produkt derselben a; zieht man aber von beiden Zahlen n ab, so ist das Produkt dieser Differenzen b. Durch welche Formeln werden diese Zahlen ausgedrückt?

17) Ein Kaufmann erhielt von einem Fabrikanten eine aus einer Sorte bestehende Sendung Leinwand für den Betrag von 400 Thlr., und 6 Monate später eine zweite Sendung für den Betrag von 450 Thlr., die 2 Stück mehr als die erste enthielt, dagegen aber auch jedes um 5 Thlr. billiger als ein Stück der ersten Sendung war. Wie viel Stück enthielt demnach die erste Lieferung und wie theuer war jedes Stück gerechnet?

18) Zwei Schwestern besaßen gemeinschaftlich ein Vermögen von 300 Thlr., von dem der größere Theil der ältern, der geringere aber der jüngern Schwester zugehörte. Dieses Ka-

---

*) Eine Bleikugel z. E., welche an einem sehr dünnen Faden hängt und hin- und herschwingt, heißt ein einfaches Pendel, von dem hier die Rede ist. Die Länge vom Aufhängepunkte bis zum Mittelpunkte der kleinen Bleikugel wird seine Länge, und jede Hin- und Herschwingung ein Pendelschlag genannt. Die Pendelschläge erfolgen immer nach gleichen Zeiten, wenn der Bogen, in dem das Pendel schwingt, nur klein ist.

pital verliehen sie zu gewissen Prozenten an einen Geschäftsmann, und es erhielt nach 5 Jahren an Kapital und Zinsen die jüngere Schwester 150 Thlr., nach 6 Jahren aber die ältere an Kapital und Zinsen 234 Thlr. Wie viel gehörte jeder Schwester von den 300 Thlr. und zu wieviel Prozent hatten sie ihre Kapitalien verliehen?

19) Ein gewisses Kapital zu gewissen Prozenten verliehen, gibt jährlich a Thlr. Zinsen; erhöhte man aber das Kapital um m und die Prozente um n, so würde der jährliche Zinsertrag b sein. Durch welche Formel wird dieses Kapital und durch welche werden die Prozente ausgedrückt, zu denen dasselbe zuerst verliehen wurde?

20) Einer meiner Freunde hatte einmal ein Kapital zu gewissen Prozenten geliehen und mußte dafür jährlich 32 Thlr. Zinsen zahlen. Nachdem er dieses Kapital zurückgezahlt hatte, nahm er ein um 300 Thlr. kleineres Kapital auf, mußte aber, da er keine Hypothek geben konnte, jedes Hundert desselben mit 1 Thlr. jährlich höher verzinsen, als bei dem ersten Kapitale und hatte deshalb jährlich nur 7 Thlr. weniger Zinsen zu entrichten, als für das erste Kapital. Wie groß war das erste Kapital, das mein Freund aufnahm, und mit wieviel Prozent verzins'te er dasselbe?

21) In Schweden soll es Höhlen von solcher Tiefe geben, daß wenn man Steine hineinwirft, das Aufschlagen derselben erst nach 15 Sekunden gehört wird. Da nun die hier gegebenen 15 Sekunden aus der wirklichen Fallzeit des Steines und der Zeit zusammengesetzt sind, binnen welcher der Schall, den das Aufschlagen des Steines erzeugt, bis zum Ohre des Beobachters dringt, ferner Benzenberg durch Versuche gefunden hat, daß sich der Schall gleichförmig fortbewegt und bei 0 Grad Reaumur 1026 Pariser Fuß in der Sekunde durchläuft: so fragt es sich, wie tief solche Höhlen sind, wenn man sich die Beobachtung bei 0 Grad Wärme gemacht denkt?

22) Die Quersumme einer dreistelligen Zahl beträgt 6, ihr Quadrat 15129 und die Summe der Quadrate aus den Einheiten der einzeln Zahlstellen 14. Welche Zahl ist dies?

23) Eine Zahl a soll dergestalt in drei Theile zerlegt werden, daß sich der erste zum zweiten wie der zweite zum dritten verhalte, und daß die Summe des ersten und zweiten Theiles um b größer als der dritte Theil sei. Welche Theile sind dies?

24) Es sind vier Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, daß das Produkt aus der ersten und zweiten gleich a, aus der zweiten und dritten gleich b, aus der dritten und vierten gleich c und die Summe der Quadrate dieser Zahlen gleich d sei. Welche Zahlen sind dies?

25) Von vier Zahlen ist die Summe der Quadrate der zwei ersten dividirt durch ihr Produkt, gleich a, eben diese Verbindung der zweiten und dritten Zahl gleich b, der dritten und vierten Zahl gleich c und die Summe der Quadrate aller vier Zahlen dividirt durch ihre Summe, gleich d.

Welche Formeln drücken diese Zahlen aus?

XIII.

Von den höhern Gleichungen.

1) Die Gleichungen, in denen die unbekannte Größe nur in der ersten und zweiten Potenz vorkommt, heißen niedere Gleichungen, und alle die, in denen die unbekannte Größe in einer höhern als in der zweiten erscheint, höhere Gleichungen. Eine höhere Gleichung heißt vom dritten, vierten . . . nten Grade, wenn die höchste Potenz der unbekannten Größe dieser Gleichung die dritte, vierte . . . nte ist.

Eine höhere Gleichung stellt man gewöhnlich so dar, daß das Glied derselben den Anfang macht, in dem die höchste Potenz der unbekannten Größe enthalten ist und nun aufeinanderfolgend die Glieder kommen, in welchen die unbekannte Größe immer in niedern Potenzen enthalten ist. So dargestellte Gleichungen heißen auch geordnete. Die allgemeine Form einer geordneten höhern Gleichung ist

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = 0,$$

und eine geordnete Gleichung vom dritten Grade

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Eine höhere Gleichung wird eine vollständige genannt, wenn zwischen der höchsten und 0ten Potenz der unbekannten Größe alle Potenzen der unbekannten Größe vorhanden sind, wie in

$$x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 6x - 75 = 0,$$

aber unvollständig, wenn eine oder einige Potenzen fehlen, wie in

$$x^5 - 3x^2 + 7x + 32 = 0;$$

und endlich eine reine Gleichung, wenn die unbekannte Größe nur in einer Potenz erscheint, oder die Gleichung von der Form

$x^n + Q = 0$ ist.

Höhere Gleichungen, von denen die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen der unbekannten Größe Zahlen sind, werden numerische oder Zahlen-Gleichungen, und die, deren Koeffizienten durch Buchstaben ausgedrückt sind, literale Gleichungen genannt.

2) Die allgemeine Form einer höhern Gleichung ist, wie schon oben bemerkt wurde,

$$(1)\ x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Ox^2 + Px + Q = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung a, also $x = a$ oder $x - a = 0$ gesetzt, verwandelt diese Gleichung in

$$(2)\ a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + Ca^{n-3} \ldots Oa^2 + Pa + Q = 0.$$

Die Gleichung (1) durch $x - a$ dividirt, gibt den Quotienten

$$(3)\ x^{n-1} + (a + A)x^{n-2} + (a^2 + aA + B)x^{n-3} + (a^3 + a^2A + aB + C)x^{n-4} \ldots + (a^{n-1} + a^{n-2}A + a^{n-3}B + a^{n-4}C \ldots aO + P)$$ und

es bleibt der Rest

$$a^n + a^{n-1}A + a^{n-2}B + a^{n-3}C \ldots a^2O + aP + Q.$$

Dieser Rest ist aber dem in (2) gefundenen Ausdrucke gleich, folglich gleich 0: unter der Voraussetzung also, daß a für x in die Gleichung (1) gesetzt, diese in 0 verwandelt, oder das a eine Wurzel der Gleichung (1) ist, läßt sich dieselbe durch $x - a = 0$ ohne Rest theilen, und es ist der Quotient von

der in (3) gegebenen Form. Die in (1) enthaltene Gleichung ist gleich 0, der Divisor $x - a$ ist ebenfalls 0: mithin muß der Quotient aus beiden Ausdrücken gleich 0 sein.

Aus dem Vorstehenden folgt nun:

1.) Jede Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \dots Ox^2 + Px + Q = 0$$

von der eine Wurzel a ist, läßt sich durch $x - a$ oder durch ihre auf 0 reduzirte Wurzelgleichung ohne Rest dividiren und der Quotient ist

$$(4)\quad x^{n-1} \left.\begin{matrix} + a \\ + A \end{matrix}\right\} x^{n-2} \left.\begin{matrix} + a^2 \\ + aA \\ + B \end{matrix}\right\} x^{n-3} \left.\begin{matrix} + a^3 \\ + a^2A \\ + aB \\ + C \end{matrix}\right\} x^{n-4} \dots$$

$$\left.\begin{matrix} + a^{n-1} \\ + a^{n-2}A \\ + a^{n-3}B \\ + a^{n-4}C \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + aO \\ + P \end{matrix}\right\} = 0.$$

2.) Jede Gleichung, die sich durch $x - a$ ohne Rest theilen läßt, hat a als Wurzel.

3.) Jede Gleichung, durch eine ihrer Wurzeln dividirt, wird um einen Grad niedriger.

Die vorstehende Gleichung gibt auch, wenn

$$A' = a + A,$$
$$B' = a^2 + aA + B,$$
$$C' = a^3 + a^2A + aB + C$$
$$\dots\dots$$
$$P' = a^{n-1} + a^{n-2}A + a^{n-3}B + a^{n-4}C + a^{n-5}D \dots$$

$Ox + P$ gesetzt wird,

(5) $x^{n-1} + A'x^{n-2} + B'x^{n-3} + C'x^{n-4} \dots O'x + P' = 0$, und zufolge des Vorstehenden muß sein

(6) $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \dots + Ox^2 + Px + Q = (x-a)(x^{n-1} + A'x^{n-2} + B'x^{n-3} \dots + O'x + P') = 0.$

Von der Gleichung (5) eine Wurzel gleich b oder $x = b$ gesetzt, gibt ohne Zweifel, wenn diese durch $x - b = 0$ dividirt wird, wie oben

$$x^{n-2} + (b + A')x^{n-3} + (b^2 + bA' + B)x^{n-4} \ldots + (b^{n-2} + b^{n-3}A' + b^{n-4}B' \ldots + bN' + O') = 0,$$

oder wenn die Koeffizienten dieser Gleichung ähnlich wie die der Gleichung (5) beziffert werden,

(7) $x^{n-2} + A''x^{n-3} + B''x^{n-4} + C''x^{n-5} \ldots + N''x + O'' = 0$, und es ist wegen der vorgenommenen Division

$$x^{n-1} + A'x^{n-2} + B'x^{n-3} \ldots O'x + P' = (x - b)(x^{n-2} + A''x^{n-3} + B''x^{n-4} + C''x^{n-5} \ldots N''x + O'') = 0,$$

also nach (6)

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = (x-a)(x-b)(x^{n-2} + A''x^{n-3} + B''x^{n-4} \ldots N''x + O'') = 0.$$

Eine Wurzel der Gleichung (7) wieder c oder $x = c$ gesetzt, und diese durch $x - c$ dividirt, wird die vorstehende verwandeln in

(8) $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = (x - a)(x - b)(x - c)(x^{n-3} + A'''x^{n-4} + B'''x^{n-5} \ldots M'''x + N''') = 0.$

Weil $x - a$, $x - b$, $x - c$ mit

$x^{n-3} + A'''x^{n-4} \ldots M'''x + N''' = 0$ multiplizirt, die Gleichung

$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots Px + Q = 0$ hervorbringen, so müssen $x - a$, $x - b$, $x - c$ in der Gleichung (1) ohne Rest enthalten, also Wurzeln dieser Gleichung sein. Nun ist $x = b$ eine Wurzel der Gleichung, die sich durch Division mit $x - a = 0$, wo a eine Wurzel der Gleichung (1) darstellt, ergibt, folglich

4.) Wird eine Gleichung durch eine ihrer Wurzeln dividirt, so ist eine Wurzel $x = b$ dieses Quotienten, auch eine Wurzel der ersten Gleichung.

Nach dem Vorstehenden läßt sich die Gleichung (4) durch $(x - a)$, $(x - b)$, $(x - c)$ ohne Rest aufeinander folgend dividiren, wenn a, b, c Wurzeln derselben sind, und bei jeder verrichteten Division ist der Quotient oder die erhaltene Gleichung um einen Grad niedriger, als die vorgehende; die Gleich-

ung (1) wird deshalb durch $n - 1$ Ausdrücke von der Form $(x - m)$ dividirt werden müssen, wenn der letzte Quotient $x - q$ sein soll. Setzen wir nun diese Divisoren

$$x - a,\ x - b,\ x - c,\ x - d,\ x - e,\ \ldots\ x - p,$$

so muß umgekehrt das Produkt derselben mit Zuziehung des letzten Quotienten die Gleichung (1) hervorbringen, oder

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \ldots (x - p)(x - q) = 0$$ sein.

Die Zahl der hier angegebenen Faktoren muß n sein, und weil jeder in der Gleichung (1) ohne Rest enthalten ist, müssen $a, b, c, d, e \ldots p, q$ Wurzeln der Gleichung sein; hieraus folgt:

5) Jede Gleichung vom nten Grade hat n Wurzeln, und wenn diese Wurzelgleichungen auf 0 reduzirt und mit einander multiplizirt werden, so bringt das Produkt die Gleichung selbst hervor, zu der diese Wurzelgleichungen gehören.

3) Jede Gleichung läßt sich in eine andere verwandeln, deren Wurzeln gleiche Vielfache der Wurzeln, der ersten Gleichung sind. Zu diesem Ende in der Gleichung

$$(1)\quad x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = 0,$$

$\frac{y}{\alpha}$ für x gesetzt, gibt

$$\frac{y^n}{\alpha^n} + A\frac{y^{n-1}}{\alpha^{n-1}} + C\frac{y^{n-2}}{\alpha^{n-2}} + D\frac{y^{n-3}}{\alpha^{n-3}} \ldots P\frac{y}{\alpha} + Q = 0,$$

mit α^n multiplizirt,

$$(2)\quad y^n + A\alpha y^{n-1} + B\alpha^2 y^{n-2} + C\alpha^3 y^{n-3} + D\alpha^4 y^{n-4} \ldots P\alpha^{n-1} y + Q\alpha^n = 0,$$ wo $y = \alpha x$ ist, oder es sind alle Wurzeln der Gleichung (2) αmal größer als die der Gleichung (1).

Setzt man aber in der Gleichung (1) αy für x, so wird

$$(3)\quad y^n + \frac{A}{\alpha}y^{n-1} + \frac{B}{\alpha^2}y^{n-2} + \frac{C}{\alpha^3}y^{n-3} \ldots \frac{P}{\alpha^{n-1}}y + + \frac{Q}{\alpha^n} = 0,$$ und es sind alle Wurzeln dieser Gleichung αmal kleiner als die der Gleichung (1), oder es ist

$$\frac{x}{\alpha} = y.$$

Aus der Vergleichung der Gleichungen (2) und (3) mit (1) ergeben sich zwei einfache praktische Regeln für die Verwandlung einer Gleichung in eine andere, deren Wurzel $a$mal größer oder kleiner als die der erstern sind.

4) Bisher nahmen wir den Koeffizienten der höchsten Potenz der unbekannten Größe einer Gleichung als 1 an; es ist aber auch möglich, sich eine Gleichung von der Form

(1) $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} \ldots Px + Q = 0$

zu denken.

Zur Bestimmung der Wurzeln der vorstehenden Gleichungen wird nöthig, diese so umzuändern, daß der Koeffizient von x^n zu 1 wird; man dividire deshalb die Gleichung (1) durch A, wornach sich ergibt

$$x^n + \frac{B}{A}x^{n-1} + \frac{C}{A}x^{n-2} + \frac{D}{A}x^{n-3} \ldots \frac{P}{A}x + \frac{Q}{A} = 0.$$

Den Fall nun gesetzt, es sind die Koeffizienten A, B, C ... der Gleichung (1) ganze Zahlen, und es soll die vorstehende Gleichung in eine andere verwandelt werden, deren Koeffizienten ebenfalls ganze Zahlen sind, so multiplizire man die Koeffizienten von x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3} ... der vorstehenden Gleichung mit A, A^2, A^3 ... und verwechsele x mit z, so wird

(2) $z^n + Bz^{n-1} + ACz^{n-2} + A^2Dz^{n-3} + A^3Ez^{n-4} \ldots A^{n-2}Pz + A^{n-1}Q = 0$, wo, rücksichtlich (1) und (2) in Nro. 3), in Beziehung auf die zum Grunde liegende Gleichung,

$$z = Ax$$

ist, oder es sind alle Wurzeln der Gleichung (2) Amal größer als die der Gleichung (1).

Die eben betrachtete Umwandlung einer Gleichung kann auch dazu gebraucht werden, eine gegebene Gleichung mit gebrochenen Koeffizienten in eine solche zu verwandeln, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind. Ist z. E.

$x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{6}x + 11 = 0$ gegeben, so wird, diese mit 6 multiplizirt,

$6x^3 - 15x^2 + 5x + 66 = 0$, mit Rücksicht auf die Gleichungen (1) und (2)

$z^3 - 15z^2 + 6.5z + 6^2.66 = 0$, oder

$$y^3 - 15z^2 + 30z + 2376 = 0, \text{ wo}$$
$$6x = z, \; x = \tfrac{1}{6}z.$$

Sind nun die Wurzeln der vorstehenden Gleichung gefunden, so darf man diese nur noch durch 6 dividiren und man hat die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + \tfrac{5}{6}x + 11 = 0.$$

5) Eine gegebene Gleichung ist auch in eine andere von der Beschaffenheit zu verwandeln, daß die Wurzeln dieser um eine bestimmte Größe h größer oder kleiner als die der ersten sind.

Die zu verwandelnde Gleichung mag sein

$$(3)\; x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = 0.$$

Nimmt man nun $x = y + h$ in diese Gleichung, so wird

$$(a)\; (y+h)^n + A(y+h)^{n-1} + B(y+h)^{n-2} + C(y+h)^{n-3} \ldots P(y+h) + Q = 0.$$

Nach dem Newtonischen Binomium ergibt sich (Auflösungen Seite 25)

$$(y+h)^n = y^n + \frac{n}{1}hy^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}h^2y^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}h^3y^{n-3} \ldots + h^n$$

$$(y+h)^{n-1} = y^{n-1} + \frac{n-1}{1}hy^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}h^2y^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}h^3y^{n-4} \ldots + h^{n-1}$$

$$(y+h)^{n-2} = y^{n-2} + \frac{n-2}{1}hy^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}h^2y^{n-4} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}h^3y^{n-4} \ldots + h^{n-2}$$

u. s. f.

Die auf einander folgenden Potenzen von $(y+h)$ mit den entsprechenden Koeffizienten aus (a) multiplizirt und immer die Glieder zusammen genommen, die gleiche Potenzen von y enthalten, gibt

$$(4)\quad y^n \left.\begin{array}{l} +\frac{n}{1}h \\ +A \end{array}\right\} y^{n-1} \left.\begin{array}{l} +\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}h^2 \\ +\frac{n-1}{1}hA \\ +B \end{array}\right\} y^{n-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}h^2 \\ +\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}h^2A \\ +\frac{n-2}{1}hB \\ +C \end{array}\right\} y^{n-3} \left.\begin{array}{l} +\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}h^4 \\ +\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3}h^3A \\ +\frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}h^2B \\ +\frac{n-3}{1}hC \\ +D \end{array}\right\} y^{n-4} \ldots = 0,$$

wo in Beziehung auf (3)

$x = y + h$, oder $x - h = y$, oder die Wurzeln dieser Gleichung sind um h kleiner als die der Gleichung (3).

Mittels des aus der vorstehenden Entwickelung folgenden Gesetzes der Bildung der Koeffizienten der auf einander folgenden Potenzen von y, ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n(n-1)(n-2)\,\ldots\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-1)n}h^n \\ \frac{(n-1)(n-2)\ldots\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-2)(n-1)}Ah^{n-1} \\ \frac{(n-2)(n-3)\,\ldots\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,\ldots\,(n-3)(n-2)}Bh^{n-2} \\ \frac{(n-3)(n-4)\,\ldots\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-4)(n-3)}Ch^{n-3} \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} y^0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n(n-1)(n-2)\,\ldots\,3\,.\,2}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-2)(n-1)}h^{n-1} \\ \frac{(n-1)(n-2)\,\ldots\,3\,.\,2}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-3)(n-2)}Ah^{n-2} \\ \frac{(n-2)(n-3)\,\ldots\,3\,.\,2}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-4)(n-3)}Bh^{n-3} \\ \frac{(n-3)(n-4)\,\ldots\,3\,.\,2}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-5)(n-4)}Ch^{n-4} \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} y^1,$$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 4\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-3)(n-2)}h^{n-2} \\
\frac{(n-1)(n-2\ldots 4\,.\,3}{1\,.\,2\ldots(n-4)(n-3)}Ah^{n-3} \\
\frac{(n-2)(n-3)\ldots 4\,.\,3}{1\,.\,2\ldots(n-5)(n-4)}Bh^{n-4} \\
\frac{(n-3)(n-4)\ldots 4\,.\,3}{1\,.\,2\ldots(n-6)(n-5)}Ch^{n-5} \\
\ldots\ldots
\end{array}\right\} y^2,$$

oder abgekürzt

$$\left.\begin{array}{l}
+h^n \\
+Ah^{n-1} \\
+Bh^{n-2} \\
+Ch^{n-3} \\
+Dh^{n-4} \\
\ldots \\
+Ph \\
+Q
\end{array}\right\} y^0,
\left.\begin{array}{l}
+nh^{n-1} \\
+(n-1)Ah^{n-2} \\
+(n-2)Bh^{n-3} \\
+(n-3)Ch^{n-4} \\
+(n-4)Dh^{n-5} \\
\ldots \\
+Oh \\
+P
\end{array}\right\} y^1,$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}h^{n-2} \\
+\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}Ah^{n-3} \\
+\frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}Bh^{n-4} \\
+\frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}Ch^{n-5} \\
+\frac{(n-4)(n-5)}{1\,.\,2}Dh^{n-6} \\
\ldots \\
+Nh \\
+O
\end{array}\right\} y^2 \text{ u. s. f.}$$

Auch hier ist das Gesetz, nach welchem die Koeffizienten der von y^0 aufsteigenden Potenzen von y sich bilden, sehr einfach.

Zufolge des Vorstehenden ist, wenn in der Gleichung (3) $y + h$ statt x gesetzt, und die entstehende Gleichung in umgekehrter Ordnung, als seither, angeschrieben wird,

$$(5)\quad \left.\begin{matrix} h^n \\ Ah^{n-1} \\ Bh^{n-2} \\ Ch^{n-3} \\ \cdots \\ Ph \\ Q \end{matrix}\right\} y^\circ + \left.\begin{matrix} nh^{n-1} \\ (n-1)Ah^{n-2} \\ (n-2)Bh^{n-3} \\ (n-3)Ch^{n-4} \\ \cdots \\ Oh \\ P \end{matrix}\right\} y +$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} h^{n-2} \\ \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2} Ah^{n-3} \\ \frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2} Bh^{n-4} \\ \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2} Ch^{n-5} \\ \cdots \\ Nh \\ O \end{matrix}\right\} y^2 + \ldots = 0.$$

Zur Herleitung besonderer Fälle werde in (3) und (5) auf einander folgend 2, 3, 4 ... statt n gesetzt, und es ergibt sich

für $x^2 + Ax + B = 0$,

$$\left.\begin{matrix} h^2 \\ Ah \\ B \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} 2h \\ A \end{matrix}\right\} y + y^2 = 0;$$

für $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$,

$$\left.\begin{matrix} h^3 \\ Ah^2 \\ Bh \\ C \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} 3h^2 \\ 2Ah \\ B \end{matrix}\right\} y + \left.\begin{matrix} 3h \\ A \end{matrix}\right\} y^2 + y^3 = 0;$$

für $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$,

$$\left.\begin{matrix} h^4 \\ Ah^3 \\ Bh^2 \\ Ch \\ D \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} 4h^3 \\ 3Ah^2 \\ 2Bh \\ C \end{matrix}\right\} y + \left.\begin{matrix} 6h^2 \\ 3Ah \\ B \end{matrix}\right\} y^2 + \left.\begin{matrix} 4h \\ A \end{matrix}\right\} y^3 + y^4 = 0,$$

für $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$,

$$\left.\begin{matrix} h^5 \\ Ah^4 \\ Bh^3 \\ Ch^2 \\ Dh \\ E \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} 5h^4 \\ 4Ah^3 \\ 3Bh^2 \\ 2Ch \\ D \end{matrix}\right\} y + \left.\begin{matrix} 10h^3 \\ 6Ah^2 \\ 3Bh \\ C \end{matrix}\right\} y^2 + \left.\begin{matrix} 10h^2 \\ 4Ah \\ B \end{matrix}\right\} y^3 +$$

$$\left.\begin{matrix} 5h \\ A \end{matrix}\right\} y^4 + y^5 = 0.$$

u. s. f.

Die vorstehenden Entwickelungen gelten nur für $x = y + h$; setzt man aber $-h$ für h, so erhält man die Entwickelungen für $x = y - h$.

6) In der Gleichung (4) in Nr. 5) den Koeffizienten von y^{n-1} gleich 0 gesetzt, gibt

$$nh + A = 0,$$

$h = -\frac{A}{n}$, und wenn dieser Werth statt h in (4) eingeführt wird, so erhält man in Beziehung auf die Gleichung

(b) $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = 0$,

$$y^n \quad \left.\begin{matrix} + \frac{(n-1)A^2}{2\ \ n^2} \\ -(n-1)\frac{A^2}{n} \\ + B \end{matrix}\right\} y^{n-2}$$

$$\left.\begin{matrix} - \frac{(n-1)(n-2)A^3}{2\ .\ 3\ \ n^3} \\ + \frac{(n-1)(n-2)A^3}{1\ .\ 2\ \ n^2} \\ - \frac{(n-2)AB}{1\ \ n} \\ + C \end{matrix}\right\} y^{n-3}$$

$$\left.\begin{array}{r} + \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\;.\;3\;.\;4}\dfrac{A^4}{n^3} \\ - \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\;.\;2\;.\;3}\dfrac{A^4}{n^3} \\ + \dfrac{(n-2)(n-3)}{1\;.\;2}\dfrac{A^2B}{n^2} \\ -(n-3)\dfrac{AC}{n} \\ + D \end{array}\right\} y^{n-4} \ldots$$

$$\left.\begin{array}{r} \pm \dfrac{A^n}{n^n} \\ \mp \dfrac{A^n}{n^{n-1}} \\ \pm \dfrac{A^{n-2}B}{n^{n-2}} \\ \mp \dfrac{A^{n-3}C}{n^{n-3}} \\ \vdots \\ - \dfrac{AP}{n} \\ + Q \end{array}\right\} = 0,$$

oder wenn möglichst zusammengezogen wird;

$$(1)\quad y^n - \left.\begin{array}{r} \dfrac{(n-1)}{2}\dfrac{A^2}{n} \\ + B \end{array}\right\} y^{n-2} + \left.\begin{array}{r} \dfrac{2(n-1)(n-2)}{2\;.\;3}\dfrac{A^3}{n^2} \\ - \dfrac{(n-2)}{1}\dfrac{AB}{n} \\ + C \end{array}\right\} y^{n-3}$$

$$- \left.\begin{array}{r} \dfrac{3(n-1)(n-2)(n-3)}{2\;.\;3\;.\;4}\dfrac{A^4}{n^3} \\ + \dfrac{(n-2)(n-3)}{1\;.\;2}\dfrac{A^2B}{n^2} \\ - \dfrac{(n-3)}{1}\dfrac{AC}{n} \\ + D \end{array}\right\} y^{n-4}$$

$$\left.\begin{array}{r}+\dfrac{4(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\dfrac{A^5}{n^4}\\ -\dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot2\cdot3}\dfrac{A^3B}{n^3}\\ +\dfrac{(n-3)(n-4)}{1\cdot2}\dfrac{A^2C}{n^2}\\ -\dfrac{(n-4)}{1}\dfrac{AD}{n}\\ +E\end{array}\right\}y^{n-4}\;\ldots\;\left.\begin{array}{r}\mp(n-1)\dfrac{A^n}{n^n}\\ \pm\dfrac{A^{n-2}B}{n^{n-2}}\\ \mp\dfrac{A^{n-3}C}{n^{n-3}}\\ \vdots\\ -\dfrac{AP}{n}\\ +Q\end{array}\right\}=0,$$

wo in Beziehung auf die Gleichung (b)

$$x = y - \frac{A}{n} \text{ ist.}$$

Im letzten Gliede der Gleichung (1) gelten die obern Zeichen dann, wenn n gerade, die untern aber, wenn n ungerade ist.

In der Gleichung (1) ist der Koeffizient von y^{n-1} gleich 0: eine jede Gleichung vom nten Grade, wie (b) ist demgemäß in eine Gleichung zu verwandeln, in welcher der Koeffizient der $(n-1)$ten Potenz der unbekannten Größe gleich 0 ist. Diese Verwandlung wird bei der direkten Auflösung einiger höhern Gleichungen nothwendig.

Zur Ableitung besonderer Fälle aus (1) werde, mit Beziehung auf (b), 2, 3, 4 . . . für n gesetzt, wodurch sich ergibt,

für $x^2 + Ax + B = 0$,

$$y^2 - \tfrac{1}{4}A^2 + B = 0;$$

für $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$,

$$y^3 \left.\begin{array}{r}-\dfrac{A^2}{3}\\ +B\end{array}\right\}y \left.\begin{array}{r}+\frac{2}{27}A^3\\ -\dfrac{AB}{3}\\ +C\end{array}\right\}=0;$$

für $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$,

$$y^4 \left.\begin{array}{r}-\frac{3}{8}A^2\\ +B\end{array}\right\}y^2 \left.\begin{array}{r}+\frac{1}{8}A^3\\ -\frac{1}{2}AB\\ +C\end{array}\right\}y \left.\begin{array}{r}-\frac{3}{256}A^4\\ +\frac{1}{16}A^2B\\ -\frac{1}{4}AC\\ +D\end{array}\right\}=0$$

u. s. f.

7) Indem man in der Gleichung

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

$y + 1$ für x setzt, wird dieselbe zufolge (4) in Nro. 5) zu

$$y^3 + \left.\begin{matrix}3\\A\end{matrix}\right\} y^3 \quad \left.\begin{matrix}+3\\2A\\+B\end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix}1\\A\\B\\+C\end{matrix}\right\} = 0.$$

Diese Koeffizienten erhält man aber auch durch nachfolgende Rechnung

$$\begin{array}{llll}
1; & A; & B; & C \\
\hline
1; & 1+A; & 1+A+B; & 1+A+B+C \\
1; & 2+A; & 3+2A+B & \\
1; & 3+A & & \\
1; & & &
\end{array}$$

wo die letzten Glieder der bestimmten Reihen die oben stehenden Koeffizienten sind.

In der Gleichung

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

ebenfalls $x = y + 1$ gesetzt, gibt,

$$y^4 + \left.\begin{matrix}4\\A\end{matrix}\right\} y^3 \quad \left.\begin{matrix}+6\\+3A\\+B\end{matrix}\right\} y^2 \quad \left.\begin{matrix}+4\\+3A\\+\tfrac{2}{1}B\\+C\end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix}+1\\+A\\+B\\+C\\D\end{matrix}\right\} = 0.$$

$$\begin{array}{lllll}
1; & A; & B; & C; & D; \\
\hline
1; & 1+A; & 1+A+B; & 1+A+B+C; & 1+A+B+C+D \\
1; & 2+A; & 3+2A+B; & 4+3A+2B+C & \\
1; & 3+A; & 6+3A+B & & \\
1; & 4+A & & & \\
1; & & & &
\end{array}$$

In der Gleichung

$x^3 + Ax^2 + BxC = 0$, $x = y - 1$ gesetzt, gibt, in Beziehung auf Seite 141

$$y^3 \quad \left.\begin{matrix}-3\\+A\end{matrix}\right\} y^2 \quad \left.\begin{matrix}+3\\-\tfrac{2}{1}A\\+B\end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix}-1\\+A\\-B\\+C\end{matrix}\right\} = 0.$$

Eben diese Koeffizienten erhält man durch nachstehende Rechnung

$$\begin{array}{l} 1;\ A;\ B;\ C; \\ \hline 1;\ -1+A;\ 1-A+B;\ -1+A-B+C \\ 1;\ -2+A;\ 3-2A+B \\ 1;\ -3+A \\ 1; \end{array}$$

Durch eine weitere Fortsetzung des Vorstehenden überzeugt man sich, daß das gegebene Verfahren zur Bestimmung der Koeffizienten einer Gleichung, die entsteht, wenn $y \pm 1$ statt x gesetzt wird, auf eine Gleichung von jedem beliebigen Grade angewendet werden kann. Die Richtigkeit dieses Verfahrens läßt sich auch direkt mittels der Abhängigkeit der Koeffizienten der auf einander folgenden Potenz von y in (4) Nro. 5) beweisen.

Zufolge des Vorstehenden gibt die Gleichung

$x^3 - 5x^2 - 2x + 7 = 0$, wenn $y + 1$ für x oder $x - 1 = y$ gesetzt wird,

$$\begin{array}{l} 1;\ -5;\ -2;\ +7 \\ \hline 1;\ -4;\ -6;\ +1 \\ 1;\ -3;\ -9 \\ 1;\ -2 \\ 1; \end{array}$$

$$y^3 - 2y^2 - 9y + 1 = 0 \text{ oder}$$

$$(x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 9(x-1) + 1 = 0,$$

und wenn hierein abermals $(x-1)$ statt x gesetzt wird,

$$\begin{array}{l} 1;\ -2;\ -9;\ +1 \\ \hline 1;\ -1;\ -10;\ -9 \\ 1;\ 0;\ -10 \\ 1;\ 1; \\ 1; \end{array}$$

$$(x-2)^3 + (x-2)^2 - 10(x-2) - 9 = 0.$$

In der Gleichung

$x^3 - 5x^2 - 2x + 7 = 0$, $x = y - 1$ oder $x + 1 = y$ gesetzt, so wird

$$\begin{array}{llll} 1; & -5; & -2; & +7 \\ \hline 1; & -6; & +4; & +3 \\ 1; & -7; & +11 & \\ 1; & -8 & & \\ 1; & & & \end{array}$$

$$y^3 - 8y^2 + 11y + 3 = 0 \text{ oder}$$
$$(x+1)^3 - 8(x+1)^2 + 11(x+1) + 3 = 0,$$

und wenn hierein nochmals $x+1$ für x gesetzt wird,

$$\begin{array}{llll} 1; & -8 & +11; & +3 \\ \hline 1; & -9; & +20; & -17 \\ 1; & -10; & +30 & \\ 1; & -11 & & \\ 1; & & & \end{array}$$

$$1(x+2)^3 - 11(x+1)^2 + 30(x+1) - 17 = 0.$$

8) In der Gleichung

$$x^{2r} + Ax^{2r-1} + Bx^{2r-2} + Cx^{2r-3} \ldots Px + Q = 0$$

von einem geraden Grade, $-y$ für x gesetzt, gibt

$$(c)\quad y^{2r} - Ax^{2r-1} + By^{2r-2} - Cy^{2r-3} \ldots - Py + Q = 0.$$

Nimmt man die Gleichung

$$y^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = 0$$

von einem ungeraden Grade an, und setzt $-y$ für x in dieselbe, so wird

$$-y^n + Ay^{n-1} - By^{n-2} + Cy^{n-3} \ldots - Py +$$
$Q = 0$ und wenn die Gleichung mit -1 multiplizirt wird,

$$(d)\quad y^n - Ay^{n-1} + By^{n-2} - Cy^{n-3} \ldots Py - Q = 0.$$

Aus der Vergleichung von (c) mit (d) folgt, daß wenn in einer Gleichung von der Form

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = 0,$$

sie sei von einem geraden oder ungeraden Grade, die Zeichen der Koeffizienten der geraden oder die der ungeraden Potenzen der unbekannten Größe verwechselt werden, die entstehende Gleichung die entgegengesetzten Wurzeln der ersten Gleichung zu Wurzeln hat.

Von der Gleichung

$$x^4 - 3x^3 - 18x^2 + 89x - 105 = 0 \text{ sind } +3$$

und — 5 zwei Wurzeln, und dem Vorstehenden gemäß ist von der Gleichung

$x^4 + 3x^3 - 18x^2 - 89x - 105 = 0$ eine Wurzel -3 und eine zweite $+5$.

In der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots Px + Q = 0$$

$\frac{1}{y}$ für x gesetzt, und man erhält

$\frac{1}{y^n} + \frac{A}{y^{n-1}} + \frac{B}{y^{n-2}} \ldots \frac{P}{y} + Q = 0$, oder wenn die Gleichung mit y^n multiplizirt ist und umgekehrt wird,

$Qy^n + Py^{n-1} + Oy^{n-3} + Ny^{n-4} \ldots By^2 + Ay + 1 = 0$.

Setzt man hingegen $\frac{m}{y}$ für x in die Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots Px + Q = 0,$$

so wird

$$\frac{m^n}{y^n} + \frac{Am^{n-1}}{y^{n-1}} + \frac{Bm^{n-2}}{y^{n-2}} \ldots \frac{Pm}{y} + Q = 0,$$

und wenn mit y^n multiplizirt wird,

$Qy^n + Pmy^{n-1} + Om^2y^{n-2} \ldots Am^{n-1}y + m^n = 0$.

Aus den letzteren Entwickelungen lassen sich leicht praktische Regeln für die Bildung einer Gleichung aus der Gleichung

$x^n + Ax^{n-1} \ldots Px + Q = 0$ ableiten, wenn deren Wurzeln, in Betracht der Wurzeln der vorstehenden Gleichung

$x = \frac{1}{y}$ oder $x = \frac{m}{y}$ sein sollen.

9) Zufolge Nr. 2) findet statt, wenn die n Wurzeln der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = 0,$$

durch a, b, c, d ... p, q ausgedrückt werden,

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = (x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x-p)(x-q) = 0,$$

oder wenn dies auf besondere Fälle bezogen wird,

$$x^2 + Ax + B = 0 = (x-a)(x-b),$$
$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 = (x-a)(x-b)(x-c),$$
$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 =$$
$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$
$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 =$$
$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)$$

u. s. f.

Durch Ausübung der hier angedeuteten Multiplikationen ergibt sich

$$x^2 + Ax + B = x^2 \left.\begin{array}{l}-a\\-b\end{array}\right\} x + ab = 0,$$

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = x^3 \left.\begin{array}{l}-a\\-b\\-c\end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l}+ab\\+ac\\+bc\end{array}\right\} x - abc = 0,$$

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D =$$

$$x^4 \left.\begin{array}{l}-a\\-b\\-c\\-d\end{array}\right\} x^3 \left.\begin{array}{l}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l}-abc\\-acd\\-abd\\-bcd\end{array}\right\} x + abcd = 0.$$

$$x^5 \left.\begin{array}{l}-a\\-b\\-c\\-d\\-e\end{array}\right\} x^4 \left.\begin{array}{l}+ab\\+ac\\+ad\\+ae\\+bc\\+bd\\+be\\+cd\\+ce\\+de\end{array}\right\} x^5 \left.\begin{array}{l}-abc\\-abd\\-abe\\-acd\\-ace\\-ade\\-bcd\\-bce\\-bde\\-cde\end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l}+abcd\\+abce\\+abde\\+acde\\+bcde\end{array}\right\} x - abcde = 0.$$

u. s. f.

Hieraus folgt

für die Gleichung

$x^2 + Ax + B = 0$, deren Wurzeln a und b sind,

$A = -a - b$, $B = ab$;

für die Gleichung

$x^3 + ax^2 + Bx + C = 0$,

$$A = -a-b-c,\ B = ab+ac+bc,\ C = -abc;$$

für die Gleichung

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

$$A = -a-b-c-d,$$

$$B = ab+ac+ad+bc+bd,$$

$$C = -abc-acd-abd-bcd,\ D = abcd;$$

für die Gleichung

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0,$$

$$A = -a-b-c-d-e,$$

$$B = ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de,$$

$$C = -abc-abd-abe-acd-ace-ade-bcd$$
$$-bce-bde-cde,$$

$$D = abcd+abce+abde+acde+bcde,$$

$$E = -abcde$$

u. s. f.

Betrachtet man hier die Bildung der Koeffizienten durch die Wurzeln a, b, c, d, e, so findet man, daß der Koeffizient A aus der Summe der entgegen gesetzten Wurzeln, der Koeffizient B aus der Summe der Produkte der entgegengesetzten Wurzeln zu je zwei, der Koeffizient C aus der Summe der Produkte der entgegengesetzten Wurzeln zu je drei, der Koeffizient D aus der Summe der entgegengesetzten Wurzeln zu je vier und das Zahlenglied E aus dem Produkte der entgegengesetzten Wurzeln zu je fünf oder aus dem Produkte der entgegengesetzten Wurzeln besteht.

Dasselbe Gesetz der Bildung der Koeffizienten durch die Wurzeln findet auch, wie man sieht, bei den Gleichungen des vierten, dritten und zweiten Grades statt, und man kann sich überzeugen, daß eben dieses Gesetz bei Gleichungen vom sechsten, siebenten u. s. f. Grade noch besteht.

Da nun die Gleichungen, zufolge Seite 138, immer aus dem Produkte ihrer auf 0 reduzirten Wurzelgleichungen, also auf gleiche Weise aus ihren Wurzeln zusammengesetzt sind: so wird das eben Angegebene der Bildung der Koeffizienten der verschiedenen Potenzen der unbekannten Größe einer Gleichung nicht nur für die sechs oder sieben ersten Grade gelten, sondern es

wird für eine Gleichung von irgend einem Grade wahr sein, oder es wird in der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots Px + Q = 0,$$

A aus der Summe der entgegengesetzten Wurzeln,
B aus " " " " " " zu je zwei,
C aus " " " " " " zu je drei,

. . . . . .

P aus der Summe der entgegengesetzten Wurzeln zu je (n—1) und
Q aus " " " " " " zu je n
multiplizirt, oder
Q dem Produkte der entgegengesetzten Wurzeln gleich sein.

Aus der Zusammensetzung der Koeffizienten der verschiedenen Potenzen der unbekannten Größe einer Gleichung durch ihre Wurzeln folgt auch, daß in der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots Ox^2 + Px + Q = 0,$$

$$P = -\left(\frac{Q}{a} + \frac{Q}{b} + \frac{Q}{c} \ldots \frac{Q}{p} + \frac{Q}{q}\right)$$

sein muß, wenn a, b, c, d . . . p, q die Wurzeln dieser Gleichung sind.

10) Aus der angegebenen Weise der Zusammensetzung der Koeffizienten der verschiedenen Potenzen der unbekannten Größe einer Gleichung durch ihre Wurzeln, folgt, daß wenn alle Wurzeln positiv sind, und die Gleichung vom nten Grade ist, diese die Form

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} \ldots \pm Px \mp Q = 0,$$

wenn aber die Wurzeln alle negativ sind, diese die Form

$$x^n + ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots + Px + Q = 0$$

hat. (Das Verhalten der letzteren Gleichung stimmt auch mit dem überein, was auf Seite 149 bemerkt worden ist.) Hieraus folgt, daß wenn alle Wurzeln einer Gleichung reell und positiv sind, sich in der Gleichung eben so viel Wechsel der Zeichen als positive Wurzeln, und wenn alle Wurzeln reell und negativ sind, die Gleichung so viel Folgen der Zeichen hat, als Wurzeln.

Wird die Gleichung vom vierten Grade

$$(e)\quad x^4 - 2x^3 - 25x^2 + 34x + 16 = 0$$

mit $x - r$ und $x + r$ multiplizirt, so ergibt sich

$$(f)\left\{\begin{array}{l}x^5 - 2x^4 - 25x^3 + 34x^2 + 16x \\ - rx^4 + 2rx^3 + 25rx^2 - 34rx - 16r\end{array}\right\} = 0.$$

$$(g)\left\{\begin{array}{l}x^5 - 2x^4 - 25x^3 + 34x^2 + 16x \\ + rx^4 - 2rx^3 - 25rx^2 + 34rx + 16r\end{array}\right\} = 0.$$

In (f) auf einanderfolgend 1, 2, 3, 4 ... für r gesetzt, gibt

$$(h)\left\{\begin{array}{l}x^5 - 3x^4 - 23x^3 + 59x^2 - 18x - 16 = 0 \\ x^5 - 4x^4 - 21x^3 + 84x^2 - 52x - 32 = 0 \\ x^5 - 5x^4 - 19x^3 + 109x^2 - 86x - 48 = 0 \\ x^5 - 6x^4 - 17x^3 + 134x^2 - 120x - 64 = 0\end{array}\right.$$

. . . .

Jede von den Gleichungen unter (h) hat 3 Wechsel und 2 Folgen der Zeichen. Die Gleichung (e) hat zwei Wechsel und 2 Folgen: also alle von dieser abgeleiteten unter (h) befindlichen Gleichungen haben 1 Wechsel mehr. Da nun auch jede der Gleichungen unter (h) eine positive Wurzel mehr hat, als die Gleichung unter (e) so folgt daraus, daß wenn eine Gleichung vom fünften Grade mit $x - r = 0$ multiplizirt oder ihr eine positive Wurzel zugesetzt wird, die entstehende Gleichung immer einen Wechsel mehr als die erstere enthält.

In (g) auf einanderfolgend 1, 2, 3, 4 ... für r gesetzt, gibt die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l}x^5 - x^4 - 27x^3 + 9x^2 + 50x + 16 = 0 \\ x^5 \pm 0x^4 - 29x^3 - 16x^2 + 80^4x + 32 = 0 \\ x^5 + x^4 - 31x^3 - 41x^2 + 118x + 48 = 0 \\ x^5 + 2x^4 - 33x^3 - 76x^2 + 152x + 64 = 0\end{array}\right.$$

. . . .

von denen jede eine Folge mehr hat, als die Gleichung (e); jede dieser Gleichungen hat aber auch eine negative Wurzel mehr, als die Gleichung (e). Hieraus folgt: wird eine Gleichung vom fünften Grade mit $x + r = 0$ multiplizirt oder ihr eine negative Wurzel zugesetzt, so hat die entstehende Gleichung eine Folge mehr, als die erste.

Was so eben von den Gleichungen des fünften Grades dargethan ist, läßt sich auf gleiche Weise für eine Gleichung von jedem beliebigen Grade darthun, und in sofern findet statt:

Wird eine Gleichung vom nten Grade mit $x - r = 0$ multiplizirt, so hat die entstehende Gleichung einen Wechsel mehr, als die erste; multiplizirt man aber eben diese Gleichung vom nten Geade mit $x + r = 0$, so erhält die entstehende Gleichung eine Folge mehr als die erste Gleichung.

Hieraus folgt umgekehrt, daß, wenn eine Gleichung, der die Wurzelgleichung $x - r = 0$ oder die Wurzel $x = r$ zukommt, durch $x - r = 0$ dividirt wird, die als Quotient erscheinende Gleichung einen Wechsel weniger haben muß, als die erste; und wenn der gegebenen Gleichung mit nur reellen Wurzeln, die Wurzelgleichung $x - r = 0$ oder die Wurzel $x = r$ zukommt, durch $x + r = 0$ dividirt, zum Quotienten eine Gleichung gibt, die eine Folge weniger enthält, als die erste Gleichung.

Dem Vorstehenden gemäß muß auf jede positive Wurzel einer Gleichung, deren Wurzeln insgesammt reell sind, ein Wechsel und auf jede negative Wurzel eine Folge kommen, oder

eine jede Gleichung, deren Wurzeln insgesammt reell sind, hat soviel positive Wurzeln als Wechsel der Zeichen und soviel negative Wurzeln, als Folgen der Zeichen.

Das vorstehende Gesetz, das Hariottische genannt, obschon es von Cartesius zuerst gefunden wurde, gilt nur dann, wenn alle Wurzeln der Gleichungen reell sind.

Zufolge des Hariottischen Gesetzes hat die Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots + Px + Q = 0$$

n negative, und die Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots \pm Px \mp Q = 0$$

n positive Wurzeln, unter der Voraussetzung, daß alle Wurzeln reell sind, was bereits Nr. 8) auf eine andere Weise dargethan ist.

11) Die Gleichung

$$(1)\ x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots Nx^2 + Ox^2 + Px + Q = 0$$

mit $x + p = 0$, das Produkt mit eben diesem Faktor und das erhaltene Produkt nochmals mit diesem Faktor multiplizirt, gibt

$$x^{n+1} + \left.\begin{matrix}A\\p\end{matrix}\right\} x^n \quad \ldots \left.\begin{matrix}O\\Np\end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix}P\\Op\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}Q\\Pp\end{matrix}\right\} x + Qp = 0,$$

$$(2)\ x^{n+2} + \left.\begin{matrix} A \\ 2p \end{matrix}\right\} x^{n+1} \ldots \left.\begin{matrix} P \\ 2Op \\ Np^2 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} Q \\ 2Pp \\ Op^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 2Qp \\ Pp^2 \end{matrix}\right\} x + Qp^2 = 0,$$

$$(3)\ x^{n+3} + \left.\begin{matrix} A \\ 3p \end{matrix}\right\} x^{n+2} \ldots \left.\begin{matrix} P \\ 3Op \\ 3Np^2 \\ Mp^2 \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} Q \\ 3Pp \\ 3Op^2 \\ Np^3 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} 3Qp \\ 3Pp^2 \\ Op^3 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 3Qp^2 \\ Pp^3 \end{matrix}\right\} x + Qp^3.$$

Die Gleichung (2) hat außer den Wurzeln der Gleichung (1) noch die zwei Wurzeln $-p$ und $-p$, die Gleichung (3) außer den Wurzeln der Gleichung (1) noch die drei Wurzeln $-p, -p, -p$.

Die Gleichungen (2) und (3) geben zu erkennen, daß wenn eine Gleichung zwei gleiche Wurzeln, jede gleich p, hat, das Quadrat einer solchen Wurzel im Zahlengliede und die erste Potenz im Koeffizienten von x enthalten, und wenn sie drei gleiche Wurzeln hat, das Zahlenglied durch p^3, der Koeffizient von x durch p^2 und der Koeffizient von x^2 durch p ohne Rest theilbar ist.

Aehnliche Gesetze finden auch für vier und mehre gleiche Wurzeln einer Gleichung statt.

Die gleichen Wurzeln einer Gleichung lassen sich mittels der vorstehenden Gesetze höchstens dann bequem bestimmen, wenn eine solche eine nicht allzu große ganze Zahl ist. Eine in jedem Falle hierzu taugliche Methode ist nachfolgende.

Vorausgesetzt, die Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots Ox^2 + Px + Q = 0$$

habe r gleiche Wurzeln, so hat die nachstehende Ableitung — die erhalten wird, wenn man den Koeffizienten jedes Gliedes mit dem Exponenten der zugehörenden Potenz von x und dieses Produkt mit der um 1 erniedrigten Potenz von x multiplizirt —

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} \ldots + 2Ox + P = 0,$$

eine gleiche Wurzel weniger *) oder nur $(r-1)$ von den gleichen Wurzeln: der gemeinschaftliche Theiler dieser Ableitung mit der gegebenen Gleichung, wird sonach aus den $(r-1)$ gleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung zusammengesetzt seyn, oder doch wenigstens diese mit enthalten müssen. Zur Erläuterung mag das Nachstehende dienen.

Die Gleichung $x^2-4x+4=0$ hat die Wurzeln 2, 2. Aus dieser Gleichung leitet sich ab

$2x-4=0$. Der gemeinschaftliche Theiler oder das größte gemeinschaftliche Maß zwischen dieser Ableitung und der gegebenen Gleichung ist

$$\begin{array}{r|r|l} x^2-4x+4 & 2x-4 & \frac{1}{2}x \\ x^2-2x & 2x-4 & -1 \\ -\quad+ & -\quad+ & \\ \hline -2x+4 & 0 & \end{array}$$

$-x+2=0$ oder

---

*) Dieser Satz läßt sich wie nachfolgend durch Differenzial-Rechnung beweisen:

Die Gleichung $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}\ldots Px+Q=0$ habe r gleiche Wurzeln, jede gleich q, so ist

$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}\ldots Px+Q=0=Y(x-q)^r$, wo Y das Produkt der $(n-r)$ andere Wurzeln darstellen mag.

Der erste Differenzialquotient der so dargestellten Gleichung ist

$(x-q)^r\delta\,.\,Y+r(x-q)^{r-1}Y=[(x-q)\delta\,.\,Y+rY](x-q)^{r-1}$, woraus folgt, daß die gegebene Gleichung mit ihrem ersten Differenzialquotienten das Produkt der $(r-1)$ gleichen Wurzeln zum gemeinschaftlichen Faktor hat.

Die Gleichung

$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}\ldots Px+Q=0$, habe r gleiche Wurzeln, jede gleich q und m gleiche Wurzeln, jede gleich p, so verwandelt sich dieselbe in

$Y(x-q)^n(x-p)^m$, wo Y das Produkt der $n-r-p$ andern Wurzeln der Gleichung bezeichnet. Der erste Differerzialquotient der so dargestellten Gleichung ist

$(x-q)^n(x-p)^m\delta.Y+nY(x-q)^{n-1}(x-p)^m+mY(x-q)^n(x-p)^{m-1}=[(x-)(x-p)\delta.Y+nY(x-p)+mY(x-q)](x-q)^{n-1}(x-p)^{m-1}$, und hat mit der gegebenen Gleichung den Faktor $(x-q)^{n-1}(x-p)^{m-1}$.

$x - 2 = 0$, wie es zufolge des oben Angegebenen sein soll.

Die Gleichung

$$x^3 + 15x^2 + 75x + 125 = 0$$

hat die Wurzeln -5, -5, -5; die Ableitung ist

$$3x^2 + 30x + 75 = 0,$$

$x^2 + 10x + 25 = 0$. Zwischen diesem Ausdrucke und der gegebenen Gleichung ist, wie oben bestimmt, das größte gemeinschaftliche Maß

$x^2 + 10x + 25 = 0$, welcher Ausdruck aus

$(x + 5)(x + 5) = (x + 5)^2$ zusammengesetzt ist.

Die Gleichung $x^3 - x^2 - 16x - 20 = 0$ hat die Wurzeln -2, -2, 5. Die Ableitung von dieser Gleichung ist

$3x^2 - 2x - 16$ und der gemeinschaftliche Theiler zwischen dieser Ableitung und der gegebenen Gleichung

$- 30x - 60 = 0$ oder

$x + 2 = 0$, wie es nach oben wieder sein muß.

Durch mehre ähnliche Beispiele wird man sich von der Wahrheit des oben Gesagten überzeugen, und finden, daß der gemeinschaftliche Theiler zwischen einer Gleichung und ihrer Ableitung nur das Produkt der gleichen Wurzeln einer Gleichung, weniger einer, ist.

Sucht man, wie oben, den gemeinschaftlichen Theiler einer Gleichung und ihrer Ableitung mit den Wurzeln 3, -5, -5, 2, 2, 2, so enthält dieser die Wurzeln -5, 2, 2; woraus folgt, daß jede Art von Wurzeln des gemeinschaftlichen Theilers um eine vermehrt werden muß, um die gleichen Wurzeln der gegebenen Gleichung zu erhalten.

Hat eine Gleichung keine gleichen Wurzeln, so findet nothwendig zwischen ihr und ihrer Ableitung kein anderes Maß als 1 statt.

12) Eine Gleichung von der Form

$$(1)\ x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots Px + Q = 0,$$

deren Koeffizienten reelle Größen sind, kann auch imaginäre Wurzeln haben; doch werden diese immer paarweise in derselben

vorkommen müssen, oder eine Gleichung wie die vorstehende kann nur eine gerade Anzahl von imaginären Wurzeln haben *). Zwei imaginäre Wurzeln der obigen Gleichung mögen $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\gamma + \delta\sqrt{-1}$ sein, auf welche Form jede imaginäre Größe reduzirt werden kann.

Der aus diesen Wurzeln sich zusammensetzende Faktor, der in der Gleichung (1) enthalten seyn muß, ist

$$0 = (x - \alpha + \beta\sqrt{-1})(x - \gamma - \delta\sqrt{-1}) =$$
$$x^2 - x(\alpha + \beta\sqrt{-1}) - x(\gamma + \delta\sqrt{-1}) +$$
$$+ (\alpha\gamma + \gamma\beta\sqrt{-1} + \alpha\delta\sqrt{-1} - \beta\delta).$$

Der hier gebildete Faktor muß aber, wenn er in (1) ohne Rest enthalten sein soll, ein reeller sein: es ist deßhalb

$$\beta\sqrt{-1} + \delta\sqrt{-1} = 0; \quad \gamma\beta\sqrt{-1} + \alpha\delta\sqrt{-1} = 0,$$
$$\beta + \delta = 0, \quad \gamma\beta + \alpha\delta = 0,$$
$$\beta = -\delta \quad \gamma\beta + \alpha\beta = 0$$
$$\gamma - \alpha = 0$$
$$\gamma = \alpha.$$

Die imaginären Wurzeln einer Gleichung von der in (1) angegebenen Form mit reellen Koeffizienten, müssen demgemäß von der Form

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$
$$x = \alpha - \beta\sqrt{-1} \text{ sein.}$$

Aus dieser Form folgt, daß durch eine imaginäre Wurzel einer Gleichung auch die zweite dazu gehörende gegeben ist.

Die Form, die zwei zusammengehörende imaginäre Wurzeln einer Gleichung haben müssen, geben für die Differenz ihrer Quadrate

$$(2\beta\sqrt{-1})^2 = -4\beta^2.$$

13) Bekanntlich ist

(1) $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = 0$ $= (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-q)$, wenn a, b, c...q die Wurzeln dieser Gleichung sind.

In der vorstehenden Gleichung $y + x$ für x gesetzt, gibt

*) Denn nur je zwei imaginäre Faktoren können ein reelles Produkt hervorbringen.

$$(y + x)^n + A(y + x)^{n-1} + B(y + x)^{n-2} +$$
$$+ C(y + x)^{n-3} \ldots P(y + x) + Q = 0 =$$
$$= (y + x - a)(y + x - b)(y + x - c) \ldots (y + x - q).$$

Aus der vorstehenden Gleichung wird, in Beziehung auf Seite 143, wenn man dort x statt h setzt,

$$(2)\ y^n + A'y^{n-1} + B'y^{n-1} + C'y^{n-2} \ldots P'y + Q' = 0,$$

deren Wurzeln

$a - x,\ b - x,\ c - x \ldots q - x$ sind, wo

$$Q' = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q,$$
$$P' = nx^{n-1} + A(n-1)x^{n-2} + C(n-2)x^{n-3} \ldots$$

Zufolge Seite 153 ist aber auch

$$P' = -\left(\frac{Q'}{a-x} + \frac{Q'}{b-x} + \frac{Q'}{c-x} \ldots \frac{Q'}{p-x}\right)$$ weil

die Nenner der einzeln Glieder die Wurzeln der Gleichung (2) sind; oder

$$P' = Q'\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} \ldots \frac{1}{x-p}\right).$$

Ferner

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \frac{a^3}{x^4} \ldots$$

$$\frac{1}{x-b} = \frac{1}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{b^2}{x^3} + \frac{b^3}{x^4} \ldots$$

$$\frac{1}{x-c} = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{c^2}{x^3} + \frac{c^3}{x^4} \ldots$$

$$\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{x-q} = \frac{1}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{q^2}{x^3} + \frac{q^3}{x^4} \ldots$$

Die über einander stehenden Glieder enthalten gleiche Potenzen aller n Wurzeln der Gleichung (1). Bezeichnet man die Summe der 0ten, der 1sten, der 2ten u. s. f. Potenzen auf einander folgend durch s_0, s_1, s_2, s_3 u. s. f., so er erhält man

$$P' = Q'\left(\frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \frac{s_3}{x^4} \ldots\right),$$ wo $s_0 = n$

sein muß.

Hierein die oben stehenden Werthe für P' und Q' substituirt, gibt

$$nx^{n-1} + A(n-1)x^{n-2} + B(n-2)x^{n-3} + C(n-3)x^{n-4} \ldots$$
$$= (x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \ldots)\left(\frac{s_0}{x}\right.$$
$$\left. + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \frac{s_3}{x^4} \ldots\right), \text{ oder}$$

$$nx^{n-1} + A(n-1)x^{n-2} + B(n-2)x^{n-3} + C(n-3)x^{n-4} \ldots$$
$$= nx^{n-1} \left.\begin{matrix} + nA \\ + s_1 \end{matrix}\right\} x^{n-2} \left.\begin{matrix} + nB \\ + As_1 \\ + s_2 \end{matrix}\right\} x^{n-3}$$
$$\left.\begin{matrix} + nC \\ + Bs_1 \\ + As_2 \\ + s_3 \end{matrix}\right\} x^{n-4} \left.\begin{matrix} + nD \\ + Cs_1 \\ + Bs_2 \\ + As_3 \\ + s_4 \end{matrix}\right\} x^{n-5} \ldots$$

Die vorstehende Gleichung ist eine identische, oder die Koeffizienten der gleichen Potenzen von x aus beiden Theilen sind einander gleich. Daraus folgt

$$s_1 + nA = A(n-1)$$
$$s_1 = -A;$$
$$s_2 + As_1 + nB = B(n-2),$$
$$s_2 = -As_1 - 2B;$$
$$s_3 = -As_2 - Bs_1 - 3C;$$
$$s_4 = -As_3 - Bs_2 - Cs_1 - 4D;$$
$$s_5 = -As_4 - Bs_3 - Cs_2 - Ds - 5E$$

u. s. f., oder

$$s_1 = -A;$$
$$s_2 = A^2 - 2B;$$
$$s_3 = -A^3 + 3AB - 3C;$$
$$s_4 = A^4 - 4A^2B + 4AC + 2B^2 - 4D;$$
$$s_5 = -A^5 - 5A^3B - 5A^2C - 5AB^2 + 5AD$$
$$+ 5BC - 5E$$

u. s. f.

Aus den Koeffizienten der auf einander folgenden Potenzen der unbekannten Größe einer Gleichung kann man, zufolge der vorstehenden Entwickelung, die Summe beliebiger Potenzen aller ihrer Wurzeln, ohne die Wurzeln selbst zu kennen, bestimmen.

Für die Gleichung

$x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$ ist, wegen

$A = -4$, $B = -11$, $C = 30$, die Summe der ersten Potenzen aller Wurzeln, oder die Summe derselben,

$$s_1 = -A = 4;$$

die Summe der Quadrate der Wurzeln

$$s_2 = 22 + 16 = 38;$$

die Summe der dritten Potenzen der Wurzeln

$$s_3 = 4 \cdot 38 + 11 \cdot 4 - 3 \cdot 30 = 106$$

u. s. f.

Um sich von der Richtigkeit der gefundenen Potenzen zu überzeugen, bemerken wir, daß die Wurzeln der vorstehenden kubischen Gleichung

2, -3, 5 sind.

14) Aus der Summe der auf einander folgenden Potenzen der Wurzeln a, b, c, ... p, q einer Gleichung

$$y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} + Cy^{n-3} \ldots Py + Q = 0,$$

ergeben sich, durch eine einfache Reduktion der oben stehenden Formeln, auch die Koeffizienten A, B, C ... P, Q durch diese ausgedrückt. Bezeichnet nämlich, wie vorstehend,

$$s_0 = a^0 + b^0 + c^0 \ldots p^0 = n,$$

$$s_1 = a + b + c \ldots p,$$

$$s_2 = a^2 + b^2 + c^2 \ldots p^2,$$

$s_3 = a^3 + b^3 + c^3 \ldots p^3$ u. s. f., so erhält man

$$A = -s_1,$$

$$B = -\frac{s_2 + As_1}{2},$$

$$C = -\frac{s_3 + As_2 + Bs_1}{3},$$

$$D = -\frac{s_4 + As_3 + Bs_2 + Cs_1}{4},$$

$$\cdots\cdots$$

$$Q = -\frac{s_n + As_{n-1} + Bs_{n-2} \ldots Ps_1}{n}.$$

15) In mehrfacher Beziehung ist es vortheilhaft, eine gegebene Gleichung

$$(1)\quad y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} + Cy^{n-3} \ldots Py + Q = 0$$

in eine Gleichung verwandeln zu können, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Die Wurzeln der angenommenen Gleichung durch a, b, c, d...p, q ausgedrückt, so sind die Quadrate der Differenzen derselben

$(a-b)^2$, $(a-c)^2$, $(a-d)^2$, $(a-e)^2$ ... $(a-p)^2$, $(a-q)^2$,
$(b-a)^2$, $(b-c)^2$, $(b-d)^2$, $(b-e)^2$ ... $(b-p)^2$, $(b-q)^2$,
$(c-a)^2$, $(c-b)^2$, $(c-d)^2$, $(c-e)^2$ ... $(c-p)^2$, $(c-q)^2$,
......

Jede dieser Reihen enthält $(n-1)$ Glieder, weil die angenommene Gleichung n Wurzeln hat, und n solche Reihen stehen über einander: demnach finden sich $n(n-1)$ Differenzen der Wurzeln, und dies würde, nach den gestellten Bedingungen, der Grad der Gleichung sein, die in Beziehung auf die angenommene, die Quadrate der Differenzen ihrer Wurzeln zu Wurzeln hat. Nun ist

$$(a-b)^2 = (b-a)^2;\ (b-c)^2 = (c-b)^2 \text{ u. s. f.}$$

und unter den oben bestimmten $n(n-1)$ Quadraten der Differenzen der Wurzeln, befinden sich immer zwei und zwei gleiche Quadrate: sonach ist die Anzahl der verschiedenen nur $\frac{n(n-1)}{2}$ und von diesem Grade ist auch die zu suchende Gleichung zu nehmen, welche die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der angenommenen Gleichung zu Wurzeln hat. Die Form der zu suchenden Gleichung ist, wenn $\frac{n(n-1)}{2} = m$ gesetzt wird,

$$(2)\quad z^m + A'z^{m-1} + B'z^{m-2} + C'z^{m-3} \ldots P'z + Q = 0,$$

und ihre Wurzeln sind

$$(a-b)^2,\ (a-c)^2,\ (a-d)^2 \ldots (b-c)^2,\ (b-d)^2 \ldots (c-\ )^2,\ (c-e)^2 \ldots (p-q)^2.$$

Mittels des binomischen Lehrsatzes ergibt sich

$$(w-a)^{2r} + (w-b)^{2r} + (w-c)^{2r} \ldots (w-q)^{2r} =$$

$$w^{2r} - \frac{2r}{1} w^{2r-1}a + \frac{2r(2r-1)}{1 \cdot 2} w^{2r-2}a^2 - \frac{2r(2r-1)(2r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} w^{2r-3}a^3 \ldots$$

$$w^{2r} - \frac{2r}{1} w^{2r-1}b + \frac{2r(2r-1)}{1 \cdot 2} w^{2r-2}b^2 - \frac{2r(2r-1)(2r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} w^{2r-3}b^3 \ldots$$

$$w^{2r} - \frac{2r}{1} w^{2r-1} c + \frac{2r(2r-1)}{1 \cdot 2} w^{2r-2} c^2 -$$

$$\frac{2r(2r-1)(2r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} w^{2r-3} c^3 \ldots$$

u. s. f.

Die gleichen Potenzen von w addirt, gibt, da die Zahl der Wurzeln $a, b, c, d, \ldots$ gleich n ist,

$$(w-a)^{2r} + (w-b)^{2r} + (w-c)^{2r} \ldots (w-q)^{2r} =$$

$$n w^{2r} - \frac{2r}{1}(a + b + c + d \ldots p + q) w^{2r-1}$$

$$+ \frac{2r(2r-1)}{1 \cdot 2}(a^2 + b^2 + c^2 \ldots p^2 + q^2) w^{2r-2}$$

$$- \frac{2r(2r-1)(2r-2r)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a^3 + b^3 + c^3 \ldots p^3 + q^3) w^{2r-3}$$

$$+ \frac{2r(2r-1)(2r-2(2r-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(a^4 + b^4 + c^4 \ldots p^4 + q^4) w^{2r-4}$$

Von der zum Grunde liegenden Gleichung, deren Wurzeln $a, b, c \ldots p, q$ sind, die Summe der gleichen Potenzen der Wurzeln wie in Nr. 14) bezeichnet und in die vorstehende Entwickelung gesetzt, gibt

$$(w-a)^{2r} + (w-b)^{2r} + (w-c)^{2r} + (w-d)^{2r} \ldots (w-q)^{2r} =$$

$$n w^{2r} - \frac{2r}{1} s_1 w^{2r-1} + \frac{2r(2r-1)}{1 \cdot 2} s_2 w^{2r-2} -$$

$$\frac{2r(2r-1)(2r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s_3 w^{2r-3}$$

u. s. f.

Hierein durchgängig erst a, dann $b, c, d \ldots p, q$ für w substituirt, gibt

$$\left.\begin{array}{l}
(a-b)^{2r} + a-c)^{2r} + (a-d)^{2r} \ldots (a-q)^{2r} \\
(b-a)^{2r} + (b-c)^{2r} + (b-d)^{2r} \ldots (b-q)^{2r} \\
(c-a)^{2r} + (c-b)^{2r} + (c-d)^{2r} \ldots (c-q)^{2r} \\
\quad \ldots \\
(q-a)^{2r} + (q-b)^{2r} + (q-c)^{2r} \ldots (q-p)^{2r}
\end{array}\right\} =$$

$$= \begin{cases} n(a^{2r}+b^{2r}+c^{2r}\dots p^{2r}+q^{2r}) \\ -\frac{2rs_1}{1}(a^{2r-1}+b^{2r-1}+c^{2r-1}+\dots p^{2r-1}+q^{2r-1}) \\ +\frac{2r(2r-1)}{1\,.\,2}s_2(a^{2r-2}+b^{2r-2}+c^{2r-2}\dots p^{2r-2}+q^{2r-2}) \\ -\frac{2r(2r-1)(2r-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{2r-3}+b^{2r-3}+c^{2r-3}\dots p^{2r-3}+q^{2r-3}) \end{cases}$$

u. s. f.

Der erste Theil der vorstehenden Gleichung besteht aus der doppelten Summe der rten Potenzen der Wurzeln der zu suchenden Gleichung (2). Die Summe der ersten, zweiten, dritten ... rten Potenzen der Wurzeln der Gleichung (3) durch S_1, S_2, $S_3 \dots S_r$ bezeichnet, gibt

$$2S_r = ns_{2r} - \frac{2r}{1}s_1 s_{2r-1} + \frac{2r(2r-1)}{1\,.\,2}s_2 s_{2r-2} - \frac{2r(2r-1)(2r-2)}{1\,.\,2\,.\,3}s_3 s_{2r-3}\dots$$

Hierein 1, 2, 3, 4 ... für r gesetzt, so ergibt sich, da $s_0 = n$ ist,

$$2S_1 = ns_2 - 2s_1 s_1 + ns_2,$$

$$S_1 = ns_2 - s_1^2;$$

$$2S_2 = ns_4 - 4s_1 s_3 + \frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}s_2 s_2 - \frac{4.3.2}{1.2.3}s_3 s_1 + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}s_3 . n,$$

$$S_2 = ns_4 - 4s_1 s_3 + 3s_2^2;$$

$$S_3 = ns^6 - 6s_1 s_5 + 15s_2 s_4 - 10s_3^2;$$

$$S_4 = ns_8 - 8s_1 s_7 + 28s_2 s_6 - 56s_3 s_5 + 35s_4^2;$$

$$S_5 = ns_{10} - 10s_1 s_9 + 45s_2 s_8 - 120s_3 s_7 + 210s_4 s_6 - 252s_5^2.$$

u. s. f.

Nach Nro. 14) ist für die Gleichung

$$z^m + A'z^{m-1} + B'z^{m-2} + C'z^{m-3} \dots P'z + Q' = 0,$$

wenn die Summe der 1sten, 2ten, 3ten u. s. f. Potenzen ihrer Wurzeln durch S_1, S_2, S_3 ... dargestellt wird,

$$A' = -S_1,$$

$$B' = -\frac{S_2 + A'S_1}{2},$$

$$C' = -\frac{S_3 + A'S_2 + B'S_1}{3},$$

$$D' = -\frac{S_4 + A'S_3 + B'S_2 + C'S_1}{4},$$

$$E' = -\frac{S_5 + A'S_4 + B'S_3 + C'S_2 + D'S_1}{5}$$

u. s. f., welches die Koeffizienten der Gleichung (2)

$$z^m + A'z^{m-1} + B'z^{m-2} \ldots P'z + Q' = 0$$

sind, die die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der Gleichung (1)

$$y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} + Cy^{n-3} \ldots Py + Q = 0,$$

zu Wurzeln hat.

Zur Anwendung der eben bestimmten Formeln, soll hier die Gleichung

(3) $x^3 - 2x + 4 = 0$

in eine andere verwandelt werden, die die Quadrate der Differenzen der Wurzeln dieser Gleichung zu Wurzeln hat.

In Beziehung auf die Gleichung (1) ist hier

$A = 0,\ B = -2,\ C = 4.$

Nach Nr. 13) ist für die Gleichung (3)

$s_1 = 0;\ s_2 = -2B = 4;\ s_3 = -3C = -12;$
$s_4 = -Bs_2 = 8;\ s_5 = -Bs_3 - Cs_2 = -40;$
$s_6 = -Bs_4 - Cs_3 = 64;$ ferner, nach oben,

$$S_1 = 3 \cdot 4 = 12,$$

$$S_2 = 3 \cdot 8 + 3 \cdot 16 = 72,$$

$$S_3 = 3 \cdot 64 + 15 \cdot 4 \cdot 8 - 10 \cdot 144 = -768;$$

$$A' = -S_1 = -12,$$

$$B' = -\frac{72 - 12 \cdot 12}{2} = 36,$$

$$C' = -\frac{-768 - 12 \cdot 72 + 36 \cdot 12}{3} = 400.$$

Die der Gleichung (3), nach den gestellten Bedingungen, entsprechende Gleichung ist vom $\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ Grade, oder hat die Form

$z^3 + A'z^2 + B'z + C = 0$, hierein die gefundenen Koeffizienten gesetzt, gibt die gesuchte Gleichung zu

(4) $z^3 - 12z^2 + 36z + 400 = 0.$

Die in (3) gegebene Gleichung hat die Wurzeln

$1 + \sqrt{-1}$; $1 - \sqrt{-1}$; -2; die in (4) gefundene Gleichung soll sonach die Wurzeln

$$(1 + \sqrt{-1} - 1 + \sqrt{-1})^2 = (2\sqrt{-1})^2 = -4$$
$$(1 + \sqrt{-1} + 2)^2 = (3 + \sqrt{-1})^2 = 8 + 6\sqrt{-1}$$
$$(1 - \sqrt{-1} + 2)^2 = (3 - \sqrt{-1})^2 = 8 - 6\sqrt{-1}$$

haben, was auch wahr ist; denn

$(z^3 - 12z^2 + 36z + 400) : (z + 4) = z^2 - 16z + 100$, woraus folgt, daß -4 eine Wurzel der Gleichung (4) ist; ferner

$$z^2 - 16z + 100 = 0,$$
$$z^2 = 16z - 100,$$
$$z = 8 \pm \sqrt{(64 - 100)} = 8 \pm 6\sqrt{-1};$$
$$z = 8 + 6\sqrt{-1}; \quad z = 8 - 6\sqrt{-1},$$ d. h.

es sind auch $8 + 6\sqrt{-1}$ und $8 - 6\sqrt{-1}$ Wurzeln der Gleichung (4).

Die hier gezeigte Verwandlung wird um so mühsamer und weitläufiger, von einem je höhern Grade die zur Verwandlung gegebene Gleichung ist; doch ist es bei der Auflösung numerischer Gleichungen bisweilen von großem Nutzen, diese Methode der Verwandlung zu kennen.

Die Gleichung

(5) $z^m + A'z^{m-1} + B'z^{m-2} \ldots P'z + Q' = 0$,

deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der Gleichung

(6) $y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} \ldots Py + Q = 0$

sind, kann nur positive Wurzeln haben, wenn die Wurzeln dieser Gleichung reell sind; sie wird aber, zufolge Nr. 12), r negative Wurzeln haben, wenn die der Verwandlung zum Grunde liegende Gleichung (6) $2r$ imaginäre Wurzeln hat: die Ver-

wandlung einer Gleichung in eine andere, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der ersten sind, wird sonach dazu dienen können, zu bestimmen, ob eine Gleichung imaginäre Wurzeln hat oder nicht. Eine einfachere und in den meisten Fällen ausreichende Methode wird in Nr. 16) gegeben werden.

Die Gleichung (5) ist vom $m = \frac{n(n-1)}{2}$ Grade, wenn ihre Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln (6) sind. Angenommen, die Gleichung (6) habe zwei gleiche Wurzeln $a = b$, so ist $(a-b)^2 = 0$, woraus folgt, daß die Gleichung (5) sodann nur $m - 1$ Wurzeln haben kann, oder unter der Form

$$z^m + A'z^{m-1} + B'z^{m-2} \ldots Py = 0 \text{ oder}$$
$$z^{m-1} + A'z^{m-2} + B'z^{m-3} \ldots P = 0$$

erscheinen muß.

Ferner wird für die Gleichung (5) $(a-b) = (a-c)^2 = (b-c)^2 = 0$, wenn die Gleichung (6) die Wurzeln $a = b = c$, oder die Gleichung (5) wird nur vom $m - 3$ Grade sein können, wenn die Gleichung (6) drei gleiche Wurzeln hat.

Der Gleichung (6) 4, 5, 6 . . . gleiche Wurzeln untergelegt und wie vorstehend den Grad der zugehörenden Gleichung (5) gefunden, so kann man daraus folgern, daß wenn die Gleichung (6) r gleiche Wurzeln hat, die Gleichung (5), deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der Gleichung (6) sind, vom

$$\frac{n(n-1) - r(r-1)}{2} \text{ Grade sein wird.}$$

Die oben gezeigte Methode wird sonach auch zum Aufsuchen der gleichen Wurzeln einer Gleichung gebraucht werden können; doch dürfte die in Nr. 11) gezeigte Methode einfacher und deshalb noch nützlicher sein, weil dort die gleichen Wurzeln gleich mit bestimmt werden.

16) Die allgemeine Gleichung

(1) $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = 0$

mit $x + 1 = 0$ und mit $x - 1 = 0$ multiplizirt, gibt

$$(2)\ x^{n+1} + (1+A)x^n + (A+B)x^{n-1} + (B+C)x^{n-2} \ldots (P+Q)x + Q = 0$$

$$(3)\ x^{n+1} + (-1+A)x^n + (-A+B)x^{n-1} + (-B+C)x^{n-2} \ldots (-P+Q)x - Q = 0.$$

Die Gleichung (2) hat eine negative und die Gleichung (3) eine positive Wurzel mehr als (1): sind folglich die Wurzeln der Gleichung (1) alle reell, so muß die Gleichung (2) eine Folge und die Gleichung (3) einen Wechsel der Zeichen mehr haben, als die Gleichung (1).

Die Gleichungen (2) und (3) kann man oft auch zur Bestimmung des Vorhandenseins imaginärer Wurzeln einer Gleichung gebrauchen. Sind die einer numerischen Gleichung (1) entsprechenden Hülfsgleichungen (2) und (3) abgeleitet, und man findet, daß (2) nicht eine Folge und (3) nicht einen Wechsel der Zeichen mehr hat, so muß die gegebene Gleichung nothwendig imaginäre Wurzeln haben; doch ist das Nichtvorhandensein imaginärer Wurzeln nicht erwiesen, wenn es mit den Zeichen der abgeleiteten Gleichungen (2) und (3) seine Richtigkeit hat. Die gegebene Gleichung muß aber auch imaginäre Wurzeln haben, wenn jede der abgeleiteten Gleichungen eine Folge oder einen Wechsel der Zeichen mehr hat als sie.

Wegen des erwähnten, sehr häufig vorkommenden Falles, sind für eine Gleichung (1) beide Ableitungen zu machen. In dieser trifft es sich nur sehr selten, wenn die Gleichung imaginäre Wurzeln hat, daß die Zeichen sich eben so ändern als bei lauter reellen Wurzeln einer Gleichung; oder es wird durch die Ableitungen (2) und (3) einer Gleichung fast immer entdeckt, ob sie imaginäre Wurzeln hat oder nicht.

Für die Gleichung

(a) $x^3 - 7x^2 + 32x - 60 = 0$ ergibt sich nach (2) nnd (3)

$$x^4 + (1-7)x^3 + (-7+32)x^2 + (32-60)x - 60 =$$

$$(b)\ x^4 - 6x^3 + 25x^2 - 28x - 60 = 0;$$

$$x^4 + (-1-7)x^3 + (7+32)x^2 + (-32-60)x - 60 =$$

$$(c)\ x^4 + 8x^3 + 39x^2 - 92x + 60 = 0.$$

Die Gleichung (b) hat eine Folge und die (c) einen Wechsel der Zeichen mehr als (a); die Gleichung (a) kann demgemäß

lauter reelle, aber auch imaginäre Wurzeln haben. Das Letztere findet hier wirklich statt.

Für die Gleichung

(d) $x^3 + 5x^2 + x + 5 = 0$ wird nach (2) und (3)

(e) $x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = 0$

(f) $x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 5 = 0$.

Die Gleichung (e) hat eine Folge mehr als (d), (f) aber 3 Wechsel mehr als (d); die Gleichung (d) hat sonach gewiß imaginäre Wurzeln.

17) In der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = 0$$

für x einen andern Werth als eine ihrer Wurzeln gesetzt, gibt für die Summe aller Glieder nicht 0, sondern eine Größe z, und z wird um so kleiner sein, je näher der für x gesetzte Werth einer ihrer Wurzeln liegt.

Von zwei Werthen α und β, die nicht Wurzeln der obigen Gleichung sind, kann der erste, in die obige Gleichung für x gesetzt, die Summe aller Glieder in m, der andere aber in $-n$ verwandeln; und es muß deshalb zwischen α und β eine Wurzel der Gleichung liegen.

In der obigen Gleichung Hx^{n-r} als das erste negative Glied und M als den größten negativen Koeffizienten genommen, so wird es immer einen Werth für x von solcher Beschaffenheit geben, daß

$$x^n > M(x^{n-r} + x^{n-r-1} + x^{n-r-2} \ldots x + 1)$$ ist,

oder daß, wenn derselbe statt x in die obige Gleichung gesetzt wird, sich statt 0 eine positive Zahl ergibt.

Je größer x^n im Vergleich mit $M(x^{n-r} + x^{n-r-1} \ldots x + 1)$ ist, um so größer wird auch die sich statt 0 ergebende positive Zahl sein; je weniger aber die Differenz eben dieser Ausdrücke beträgt, desto näher wird der für x gesetzte Werth mit einer Wurzel der Gleichung zusammen fallen.

Nun ist x^n das erste positive Glied der Gleichung und, weil n der größte Exponent ist, für $x > 1$, größer als jede andere Potenz von x, aber doch kleiner als die Summe aller positiven Glieder; und

$M(x^{n-r} + x^{n-r-1} \ldots x + 1)$ größer als die Summe aller positiven Glieder: für

$$(2)\quad x^n = M(x^{n-r} + x^{n-r-1} \ldots x + 1)$$

erhält sonach x einen Werth, der größer als die größte positive Wurzel der Gleichung sein muß. Dieser Werth von x nun wird die Grenze der größten positiven Wurzel genannt, obschon dieser Werth, nach (2) berechnet, oft noch sehr von der größten positiven Wurzel entfernt ist.

Mittels (2) die Grenze der größten positiven Wurzel einer Gleichung zu finden, würde sehr umständlich sein; diese Formel kann wie nachfolgend abgekürzt werden.

Weil

$$\frac{x^{n-r+1} - 1}{x - 1} = x^{n-r} + x^{n-r-1} \ldots x + 1 \text{ ist,}$$

so wird (1) zu

$$x^n > M.\frac{x^{n-r+1} - 1}{x - 1}, \text{ um so mehr}$$

$$x^n > M.\frac{x^{n-r+1}}{x - 1} \text{ d. h.}$$

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{x^{n-r+1}} > M \text{ oder } x^r - x^{r-1} > M.$$

Da $(x-1)^r > x^r - x^{r-1}$ ist, so wird um so mehr

$$(x-1)^r > M \text{ oder}$$

$$x > 1 + \sqrt[r]{M} \text{ sein.}$$

Weil, wenn für x ein Werth größer als $1 + \sqrt[r]{M}$ in die angenommene Gleichung gesetzt, sich statt 0 eine positive Zahl ergibt: so muß, wegen des Obigen und wegen der eben vorgenommenen Reduktionen

$1 + \sqrt[r]{M}$ selbst noch größer als die größte positive Wurzel der Gleichung sein, für welche der größte negative Koeffizient M und der Exponent des ersten negativen Gliedes (n—r) ist, oder ihm selbst in einer vollständigen Gleichung r Glieder vorstehen; oder endlich, es wird nach (2)

$$x = 1 + \sqrt[r]{M}$$

die Grenze bestimmen, über welche hinaus keine positive Wurzel mehr liegt.

So ist z. E. in der Gleichung

$$x^3 - 17x^2 + 36x + 288 = 0,$$

$$M = 17, \; r = 1,$$

$1 + \sqrt[r]{M} = 1 + 17 = 18$ der Grenzwerth für die größte positive Wurzel, obschon die größte positive Wurzel nur 12 ist.

Für die Gleichung

$x^4 + 20x^3 + 98x^2 - 116x - 1155 = 0$ ergibt sich die Grenze der größten positiven Wurzel, wegen $M = 116$, $r = 3$, zu

$1 + \sqrt[r]{M} = 1 + \sqrt[3]{116} = 1 + 4 = 5$, obschon die größte positive Wurzel nur 3 ist.

In der Gleichung

(a) $x^4 + 20x^3 + 98x^2 - 116x - 1155 = 0$

die Zeichen der Koeffizienten der ungeraden Potenzen von x gewechselt, gibt

(b) $x^4 - 20x^3 + 98x^2 + 116x - 1155 = 0$ und es ist hier, zufolge Nr. 8), die größte positive Wurzel, der größten negativen Wurzel der Gleichung (a) gleich. Für die Gleichung (b) ist die Grenze der größten positiven Wurzel, wegen $r = 1$, $M = 1155$,

$1 + \sqrt[r]{M} = 1 + 1155 = 1156$ oder die Grenze der größten negativen Wurzel der Gleichung (a).

Für die Bestimmung der größten negativen Wurzel einer Gleichung läßt sich aus dem Vorstehenden eine besondere praktische Regel ableiten.

Die Grenzwerthe der größten positiven und negativen Wurzeln einer Gleichung leisten bei der Bestimmung der Wurzeln von Gleichungen, die den vierten Grad übersteigen, oft sehr beträchtliche Abkürzungeu.

18) Eine vollständig geordnete Gleichung von der Form

(1) $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots Cx^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0$, in welcher die Koeffizienten der von beiden Enden gleich weit abstehenden, oder die Koeffizienten der Glieder gleich sind, die n zur Summe der Exponenten ihrer unbekannten Größe x geben, heißt nach Euler, eine reziproke Gleichung. Diese Benennung hat ihren Grund in den Eigenschaften der Wurzeln. Hat nämlich eine solche Gleichung die Wurzel a, so hat sie auch reziproke (umgekehrte) Wurzel $\frac{1}{a}$. Um sich von der Wahrheit des Gesagten zu überzeugen, setze man in die Gleichung (1) erstlich a und sodann $\frac{1}{a}$ für x und man erhält

(2) $a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + Ca^{n-3} \ldots Ca^3 + Ba^2 + Aa + 1 = 0$;

$$\frac{1}{a^n} + \frac{A}{a^{n-1}} + \frac{B}{a^{n-2}} + \frac{C}{a^{n-3}} \ldots \frac{C}{a^3} + \frac{B}{a^2} + \frac{A}{a}$$

$+ 1 = 0$, oder, wenn mit a^n multiplizirt und die entstehende Gleichung umgekehrt angeschrieben wird,

(3) $a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + Ca^{n-3} \ldots Ca^3 + Ba^2 + Aa + 1 = 0$.

Weil (2) und (3) gleich sind, und (2) dadurch aus (1) entstand, daß a für x und (3), daß $\frac{1}{a}$ für x gesetzt wurde: so hat die Gleichung (1) die Wurzeln $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \ldots$, wenn ihr die Wurzeln $a, b, c \ldots$ entsprechen.

19) Die reziproke Gleichung

(1) $x^{2n} + Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} + Cx^{2n-3} \ldots Cx^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0$,

werde durch x^n dividirt, so ergibt sich

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots \frac{B}{x^{n-2}} + \frac{A}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^n} = 0,$$

und wenn die von beiden Enden gleich weit abstehenden Glieder addirt werden,

$$(2)\ \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + A\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) +$$
$$B\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) \ldots = 0.$$

Jetzt $x + \frac{1}{x} = z$ genommen, gibt

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = z^2,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2;$$

$$x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = z^3,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = z^3 - 3z;$$

$$x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = z^4 - 4z^2 + 4,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = z^4 - 4z^2 + 2;$$

$x^5 + \frac{1}{x^5} = z^5 - 5z^3 + 5z$ u. s. f. und durch Substitution dieser Werthe in (2) erhält man eine Gleichung von der Form

$$(3)\ z^n + A'z^{n-1} + B'z^{n-2} + C'z^{n-3} \ldots P'z + Q' = 0.$$

Jede reziproke Gleichung vom 2nten Grade läßt sich demgemäß in eine Gleichung vom nten Grade verwandeln.

Aus den Wurzeln der Gleichung (3) ergeben sich die der zum Grunde liegenden Gleichung (1) zu

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

$$x^2 + 1 = xz,$$

$$x = \frac{z \pm \sqrt{(z^2 - 4)}}{2}.$$

20) In der reziproken Gleichung

$$(1)\ x^{2n+1} + Ax^{2n} + Bx^{2n-1} + Cx^{2n-2} \ldots Kx^{n+1}$$
$$+ Kx^n \ldots Cx^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0,$$

$x = -1$ gesetzt, gibt

$$-1 + A - B + C \dots \pm K \mp K - C + B - A + 1 = 0,$$

woraus folgt, daß die Gleichung (1) durch $x + 1 = 0$ ohne Rest theilbar ist oder die Wurzel -1 hat.

Die von beiden Enden gleich weit abstehenden Glieder der Gleichung (1) addirt und durch ihre Wurzelgleichung $x + 1 = 0$ dividirt, gibt

$$(3)\quad \frac{x^{2n+1}+1}{x+1} + Ax\left(\frac{x^{2n-1}+1}{x+1}\right) + Bx^2\left(\frac{x^{2n-3}+1}{x+1}\right) \dots Kx^n\left(\frac{x+1}{x+1}\right) = 0.$$

Nun ist, wenn p eine ungerade Zahl bezeichnet,

$$\frac{x^p+1}{x+1} = x^{p-1} - x^{p-2} + x^{p-3} \dots - x^4 + x^3 - x^2 + 1.$$

Hierein, nach (3), $2n + 1$, $2n - 1$, ... für p gesetzt, die Entwickelungen noch mit 1, Ax, Bx^2 ..., wie es (3) erfordert, multiplizirt und sodann die gleichen Potenzen von x zusammengezogen, so wird

$$(4)\quad x^{2n} \left.\begin{matrix}-1\\+A\end{matrix}\right\} x^{2n-1} \left.\begin{matrix}+1\\-A\\+B\end{matrix}\right\} x^{2n-2} \left.\begin{matrix}-1\\+A\\-B\\+C\end{matrix}\right\} x^{2n-3} \dots \left.\begin{matrix}+1\\-A\\+B\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}-1\\+A\end{matrix}\right\} x + 1 = 0.$$

Die Gleichung (4) ist aus (1) durch Division der Wurzelgleichung $x + 1$ entstanden: demgemäß läßt sich jede reziproke Gleichung von einem ungeraden Grade mit nur positiven Koeffizienten, wie (1), in eine um einen Grad niedrigere oder in eine reziproke Gleichung von einem geraden Grade verwandeln.

Die reziproke Gleichung

$$(5)\quad x^{2n+1} - Ax^{2n} + Bx^{2n-1} - Cx^{2n-2} \dots + Cx^3 - Bx^2 + Ax - 1 = 0$$

verwandelt sich für $x = 1$ in 0, und dividirt man sie, ähnlich wie oben, durch ihre Wurzelgleichung $x - 1$, so erhält man die reziproke Gleichung

$$x^{2n} \left.\begin{matrix}+1\\-A\end{matrix}\right\} x^{2n-1} \left.\begin{matrix}+1\\-A\\+B\end{matrix}\right\} x^{2n-2} \left.\begin{matrix}+1\\-A\\+B\\-C\end{matrix}\right\} x^{2n-3} \ldots$$

$$\left.\begin{matrix}+1\\-A\\+B\\-C\end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix}+1\\-A\\+B\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}+1\\-A\end{matrix}\right\} x + 1 = 0.$$

Eben wie vorstehend, ergibt sich für die reziproke Gleichung

$$(6)\quad x^{2n+1} + Ax^{2n} + Bx^{2n-1} \ldots - Cx^3 - Bx^2 - Ax - 1 = 0,$$

wenn sie durch ihre Wurzelgleichung $x - 1$ dividirt wird, die reziproke Gleichung

$$x^{2n} \left.\begin{matrix}+1\\+A\end{matrix}\right\} x^{2n-1} \left.\begin{matrix}+1\\+A\\+B\end{matrix}\right\} x^{2n-2} \left.\begin{matrix}+1\\+A\\+B\\+C\end{matrix}\right\} x^{2n-3} \ldots$$

$$\left.\begin{matrix}+1\\+A\\+B\\+C\end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix}+1\\+A\\+B\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}+1\\+A\end{matrix}\right\} x + 1 = 0.$$

Aus dem Vorstehenden wird man entnehmen, daß jede reziproke Gleichung von einem ungeraden Grade eine Wurzel ± 1 haben muß, und daß jede reziproke Gleichung von einem ungeraden Grade auf eine reziproke Gleichung von einem geraden Grade zurückgeführt werden kann. Da aber jede reziproke Gleichung vom $2n$ten Grade in eine Gleichung vom $n$ten Grade zurückgeführt werden kann, so ist jede reziproke Gleichung vom $2n+1$ Grade in eine Gleichung vom $n$ten Grade zu verwandeln.

21) Nach Nr. 18) ist, wenn eine reziproke Gleichung die Wurzel a hat, auch $\frac{1}{a}$ eine Wurzel derselben. Zufolge Nr. 12) gehört jeder Gleichung die Wurzel $a - b\sqrt{-1}$ zu, wenn sie die Wurzel $a + b\sqrt{-1}$ hat. Hiernach muß jede reziproke Gleichung, wenn sie die imaginäre Wurzel

$$x = a + b\sqrt{-1}$$

hat, auch noch die imaginären Wurzeln

$$x = a - b\sqrt{-1}$$

$$x = \frac{1}{a + b\sqrt{-1}} = \frac{a - b\sqrt{-1}}{a^2 + b^2},$$

$$x = \frac{1}{a - b\sqrt{-1}} = \frac{a + b\sqrt{-1}}{a^2 + b^2}$$ haben, oder in jeder reziproken Gleichung kommen die imaginären Wurzeln zu Vieren vor.

Von der Bestimmung der Wurzeln höherer Gleichungen.

Nachdem wir die vorzüglichsten Eigenschaften der höhern Gleichungen abgehandelt haben, kommen wir zu den Methoden, durch welche sich die Wurzeln derselben bestimmen lassen.

Nur für Gleichungen des dritten und vierten Grades ist es für jetzt gelungen, direkte Methoden zur Bestimmung ihrer Wurzeln anzugeben; doch lassen sich die Wurzeln solcher Gleichungen, die den vierten übersteigen, noch ziemlich genau und bequem durch Näherung bestimmen *). Daß hier nur von numerischen Gleichungen die Rede sein kann, versteht sich von selbst.

Bestimmung der Wurzeln kubischer Gleichungen.

22) Jede kubische Gleichung ist zufolge Nr. 6) auf die Form

$x^3 + Px + Q = 0$, oder auf die Form

(1) $x^3 = Px + Q$

zurückzuführen.

Eine Wurzel der Gleichung (1) $p + q$ oder

(2) $x = p + q$ gesetzt, gibt

*) Für die Bestimmung der Wurzeln höherer Gleichungen ist zu empfehlen: „Entwickelung aller möglichen Wurzeln der bestimmten numerischen Gleichungen jedes Grades, nach einer neuen Formel. Von Dr. Bauer. Berlin, bei Rücker. Zweite Auflage, 1825."

$$x^3 = p^3 + q^3 + 3p^2q + 3pq^2 = p^3 + q^3 + 3pq(p + q),$$

nach (2)

$$x^3 = p^3 + q^3 + 3pqx.$$

Aus der Vergleichung dieser Gleichung mit (1) folgt

$$p^3 + q^3 = Q;\ 3pq = P,$$

$$q = \frac{P}{3p};\ q^3 = \frac{P^3}{27p^3}, \text{ also}$$

$$p^3 + \frac{P^3}{27p^3} = Q,$$

$$p^6 = Qp^3 - \frac{P^3}{27},$$

$$p^3 = \frac{Q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}\right)},$$

$$p = \sqrt[3]{\left[\frac{Q \pm \sqrt{(Q^2 - \frac{4}{27}P^3)}}{2}\right]}, \text{ folglich}$$

$$q^3 = Q - p^3 = Q \mp \sqrt{\left(\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}\right)},$$

$$q = \sqrt[3]{\left[\frac{Q \mp \sqrt{(Q - \frac{4}{27}P^3)}}{2}\right]}.$$

In Beziehung auf (3) ist

$$\text{I.} \begin{cases} x = p + q = \sqrt[3]{[\frac{1}{2}(Q + \sqrt{(Q^2 - \frac{4}{27}P^3)})]} + \\ \quad + \sqrt[3]{[\frac{1}{2}(Q - \sqrt{(Q^2 - \frac{4}{27}P^3)})]}, \\ \text{eine Wurzel der kubischen Gleichung} \\ x^3 = Px + Q. \end{cases}$$

Weil sich die Werthe für p und q nur durch die Vorzeichen der Quadratwurzelgröße unterscheiden, und wenn die Quadratwurzel für p negativ ist, sie für q positiv sein muß, und so umgekehrt, so gestaltet sich der Werth für $x = p + q$ wie oben bemerkt.

Die eben bestimmte Formel für die Wurzel einer kubischen Gleichung von der Form

$$x^3 = Px + Q,$$

heißt die Cardanische*).

Die angenommene Gleichung

$$x^3 - Px - Q = 0,$$

durch die auf 0 reduzirte Wurzelgleichung $x - (p + q) = 0$ dividirt, gibt den Quotienten

$$x^2 + (p + q)x + (p + q)^2 - P = 0$$ mit dem Reste

$$(p + q)^3 - P(p + q) - Q,$$ der, weil $(p + q)$ eine Wurzel ist, gleich 0 sein muß. Zufolge Nr. 4) sind nun in dem bestimmten Quotienten die zwei andern Wurzeln der kubischen Gleichung enthalten. Diese ergeben sich zu

$$\text{II. } x = \frac{-(p + q) \pm \sqrt{[4P - 3(p + q)^2]}}{2}.$$

Durch die Cardanische Formel wird sich nur dann eine Wurzel einer kubischen Gleichung entwickeln lassen, wenn P negativ oder wenn für ein positives P, $\frac{4}{27}P^3 < Q^2$ ist. Ist aber P positiv und $\frac{4}{27}P^3 > Q^2$, so erscheint die Wurzelgröße

$$\sqrt{(Q^2 - \tfrac{4}{27}P^3)}$$

unter einer imaginären Gestalt; doch sind gerade für diesen Fall alle Wurzeln der kubischen Gleichung reell. Diesen Fall nannten die Alten den casus irreducibilis tertii gradus oder nur casus irreducibilis.

Wegen des noch häufigen Vorkommens der kubischen Gleichungen, wollen wir diese noch etwas näher betrachten.

23) Von der quadratischen Gleichung

$x^2 + bx + c = 0$ sind die Wurzeln enthalten in

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - c\right)}.$$

Die Wurzeln eben dieser Gleichung p und q gesetzt, so ist, Nr. 9)

---

*) Das geschichtliche dieser Formel findet man in Klügels mathematischem Wörterbuche unter dem Artikel „Algebra", die obige Formel selbst unter dem Artikel „Cardans Regel" und in dem Artikel „Gleichung"; eben dasselbe in „Egens Handbuch der allgemeinen Arithmetik, Band II. Abschnitt VI."

$b = -p - q$; $c = pq$, und wenn die Wurzeln dieser Gleichung reell sein sollen, muß stattfinden

$$c < \frac{b^2}{4}, \text{ d. g. nach dem Vorstehenden}$$

$$pq < \tfrac{1}{4}(p + q)^2, \text{ also um so mehr}$$

$$(1)\ pq < (p + q)^2.$$

Die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 + Px + Q = 0,$$

mögen p, q, $-r$ sein, d. g. nach Nr. 9)

$$-p - q + r = 0,$$

$$r = p + q;$$

$$P = -pr - qr + pq = pq - r(p + q) =$$

$$= pq - (p + q)^2; \text{ d. g.}$$

$$(2)\ pq > (p + q)^2.$$

Nun sind p und q die Wurzeln der quadratischen Gleichung, welche entsteht, wenn die angenommene kubische Gleichung durch $x + r = 0$ dividirt wird. Sollen aber die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung reell sein, so muß nach (1) stattfinden

$pq < (p + q)^2$; nach (2) findet aber das Gegentheil statt: das gibt zu erkennen, daß p und q imaginäre Größen sind, oder, daß die kubische Gleichung

$$x^3 + Px + Q = 0$$

eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat.

Nach Nr. 8) hat die Gleichung

$$x^3 + Px - Q = 0$$

die entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + Px + Q = 0:$$

folglich hat jede kubische Gleichung von der Form

$$x^3 + Px \mp Q = 0$$

oder von der Form

$$x^3 = -Px \pm Q$$

zwei imaginäre und nur eine reelle Wurzel.

Aus I. Nr. 22) erhält man für die Gleichung

$$x^3 = -Px \pm Q$$

eine Wurzel zu

$$x = \sqrt[3]{\left[\frac{\pm Q + \sqrt{(Q^2 + \frac{4}{27}P^3)}}{2}\right]} +$$

$$+ \sqrt[3]{\left[\frac{\pm Q - \sqrt{(Q^2 + \frac{4}{27}P^3)}}{2}\right]}.$$

Dies gibt zu erkennen, daß die einzige mögliche Wurzel einer kubischen Gleichung

$$x^3 = - Px \pm Q$$

mittels der Cardanischen Formel immer gefunden werden kann.

24) Die der Gleichung

$$x^3 - Px + Q = 0 \text{ oder}$$

$$x^3 = Px - Q$$

entsprechende Wurzel für $Q^2 = \frac{4}{27}P^3$, ist nach I. Nr. 22)

$$x = \sqrt[3]{\frac{-Q}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-Q}{2}} = -2\sqrt[3]{\frac{Q}{2}} = p + q.$$

Aus $Q^2 = \frac{4}{27}P^3$ folgt

$P = \sqrt[3]{\frac{27}{4}Q^2} = 3\sqrt[3]{\frac{Q^2}{4}}$, und es sind nun die zwei andern Wurzeln der angenommenen Gleichungen, nach II. in Nr. 22)

$$x = \tfrac{1}{2}\left[2\sqrt[3]{\frac{Q}{2}} \pm \sqrt{\left(12\sqrt[3]{\frac{Q^2}{2}} - 12\sqrt[3]{\frac{Q^2}{4}}\right)}\right] =$$

$= \sqrt[3]{\frac{Q^2}{2}} \pm 0$, oder die kubische Gleichung

$$x^3 = Px - Q,$$

hat für $Q^2 = \frac{4}{27}P^3$, die Wurzeln

$$x = -2\sqrt[3]{\frac{Q}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{Q}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{Q}{2}}.$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 = Px + Q$$

sind zufolge Nr. 8) die entgegengesetzten der Gleichung

$$x^3 = Px - Q:$$

die Gleichung $x^3 = Px \pm Q$ hat demgemäß, für $Q^2 = \frac{4}{27}P^3$, zwei gleiche Wurzeln, oder die Wurzeln derselben sind

$$x = \pm 2\sqrt[3]{\frac{Q}{2}}$$

$$x = \mp \sqrt[3]{\frac{Q}{2}}$$

$$x = \mp \sqrt[3]{\frac{Q}{2}}.$$

Daß die Gleichung

(1) $x^3 - Px + Q = 0$ folglich auch die Gleichung $x^3 - Px - Q = 0$, für $Q^2 = \frac{4}{27}P^3$ zwei gleiche Wurzeln hat, läßt sich auch noch so darthun.

Die Wurzeln der Gleichung (1) p, q, $-r$ gesetzt, gibt

$$r = p + q; \quad -P = pq - pr - qr = pq - (p+q)^2,$$

$$Q = pqr = pq(p + q).$$

Wegen $Q^2 = \frac{4}{27}P^3$ wird

$p^2q^2(p + q)^2 = \frac{4}{27}[(p + q)^2 - pq]^3$, und der zweite Theil dieser Gleichung ist nur dann dem ersten gleich, wenn $p = q$ gesetzt wird: die Gleichung (1) hat sonach für $Q^2 = \frac{4}{27}P^3$ zwei gleiche Wurzeln.

25) Von der kubischen Gleichung

(1) $x^3 - Px + Q = 0$ oder

$$x^3 = Px - Q$$

mögen die Wurzeln p, q, $-r$ und die eine reelle Wurzel der Gleichung (1) $-r$ sein. Die Gleichung (1) durch ihre auf 0 reduzirte reelle Wurzelgleichung $x + r = 0$ dividirt, gibt eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln die zwei andern Wurzeln p und q der kubischen Gleichung (1) sein müssen (Nr. 4). Die Wurzeln dieser oder die zwei andern Wurzeln p und q der kubischen Gleichung sind aber, zufolge Nr. 23), reell, wenn

(a) $pq < \frac{1}{4}(p+q)^2$, aber imaginär, wenn

(b) $pq > \frac{1}{4}(p+q)^2$ ist.

Die Wurzeln der Gleichung (1) p, q, — r gesetzt, gibt

$$-p-q+r=0, \quad pq-pr-qr=-P; \quad pqr=Q,$$

$$r=p+q \qquad -pq+r^2=P \qquad pq=\frac{Q}{r}.$$

Nach (a) wird hieraus

$$pq<\tfrac{1}{4}r^2; \quad \frac{Q}{r}<\tfrac{1}{4}r^2; \quad P>r^2-\tfrac{1}{4}r^2,$$

$$4Q<r^3, \quad P>\tfrac{3}{4}r^2,$$

$$16Q^2<r^6, \quad \tfrac{64}{27}P^3>r^6 \text{ d. g.}$$

$$16Q^2<\tfrac{64}{27}P^3,$$

$$Q^2<\tfrac{4}{27}P^3.$$

Dieses Verfahren ging aus (a) hervor, für welches die Wurzeln p, q, — r der kubischen Gleichung reell sind. Weil ferner die Wurzeln der kubischen Gleichung

$x^3 - Px - Q = 0$ die entgegengesetzten der Gleichung (1) sind, so folgt aus dem Vorstehenden:

Die Gleichung

$$x^3 - Px \pm Q$$

hat drei reelle Wurzeln, wenn $Q^2<\frac{4}{27}P^3$ ist.

Für die Wurzeln p, p, — r der Gleichung (1) ist nach oben

$r=p+q; \quad P=r^2-pq; \quad pq=\frac{Q}{r}$, und es gibt

hiernach (b)

$$pq>\tfrac{1}{4}r^2; \quad P<r^2-\tfrac{1}{4}r^2; \quad \tfrac{1}{4}r^2<\frac{Q}{r},$$

$$\tfrac{4}{3}P<r^2; \qquad r^3<4Q,$$

$$\tfrac{64}{27}P^3<r^6; \qquad r^6<16Q^2 \text{ d. g.}$$

$$16Q^2>\tfrac{64}{27}P^3,$$

$$Q^2>\tfrac{4}{27}P^3.$$

Diese Relation ergab sich aus (b), für welche die kubische Gleichung (1) zwei imaginäre Wurzeln hat.

Da ferner die Gleichung

$$x^3 - Px - Q = 0$$

die entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung (1), so ergibt sich aus dem Vorstehenden:

Die Gleichung

$$x^3 = Px \pm Q$$

hat für $Q^2 > \frac{4}{27}P^3$ zwei imaginäre Wurzeln.

Das Obige auf die Cardanische Formel bezogen, so erhält man, daß durch diese nur die Wurzeln solcher kubischer Gleichungen gefunden werden können, die

a) zwei imaginäre Wurzeln, oder

b) drei reelle Wurzeln haben, von denen zwei gleich und mit gleichen Zeichen versehen sind,

und daß sie, in der oben stehenden Form, nicht zur Bestimmung einer Wurzel tauglich ist, wenn die kubische Gleichung drei reelle Wurzeln hat.

26) Die Cardanische Formel läßt sich auch so umgestalten, daß durch sie eine Wurzel einer kubischen Gleichung gefunden werden kann, wenn alle drei reell sind, und zwar wie nachfolgend.

Für die Gleichung

$$x^3 = Px + Q$$

ist nach Nr. 22)

$$x = \sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}Q + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}Q^2 - \tfrac{1}{27}P^3\right)}\right]} + \\ + \sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}Q - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}Q^2 - \tfrac{1}{27}P^3\right)}\right]}.$$

Zur Abkürzung sei nun

$\frac{1}{2}Q = a$, und wie es erfordert wird,

$\sqrt{\left(\frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{27}P^3\right)} = b\sqrt{-1}$; d. g.

$$(1)\quad x = \sqrt[3]{(a + b\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(a - b\sqrt{-1})}.$$

Zufolge I. Seite 25 der Auflösungen ist

$$(2)\quad (a + b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 \ldots = a^n\left(1 + \frac{n}{1}\frac{b}{a} + \right. \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{b^3}{a^3} + \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\frac{b^4}{a^4} \ldots\right).$$

Hierein $b\sqrt{-1}$ statt b und $\frac{1}{3}$ statt n gesetzt, gibt

$$\sqrt[3]{(a+b\sqrt{-1})} = \sqrt[3]{a}\left[1+\frac{1}{1.3}\frac{b}{a}\sqrt{-1}+\frac{1.2}{1.2.3^2}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1.2.5}{1.2.3.3^3}\frac{b^3}{a^3}\sqrt{-1}-\frac{1.2.5.7}{1.2.3.4.3^4}\cdot\frac{b^4}{a^4}\ldots\right]$$

folglich auch

$$\sqrt[3]{(a-b\sqrt{-1})} = \sqrt[3]{a}\left[1-\frac{1}{1.3}\frac{b}{a}\sqrt{-1}+\frac{1.2}{1.2.3^2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{1.2.5}{1.2.3.3^3}\frac{b^3}{a^3}\sqrt{-1}-\frac{1.2.5.8}{1.2.3.4.3^4}\frac{b^4}{a^4}\ldots\right] \text{ d. g.}$$

in Beziehung auf (1)

$$(3)\ x = 2\sqrt[3]{a}\left[1+\frac{1.2}{1.2.3^2}\cdot\frac{b^2}{a^2} - \frac{1.2.5.8}{1.2.3.4.3^4}\frac{b^4}{a^4} + \frac{1.2.5.8.11.14}{1.2.3.4.5.6.3^6}\frac{b^6}{a^6}\ldots\right] =$$

$$= 2\sqrt[3]{a}\left[1+\frac{1}{3^2}\frac{b^2}{a^2} - \frac{5.8}{4.3^5}\cdot\frac{b^4}{a^4} + \frac{5.8.11.14}{4.5.6\ 3^7}\cdot\frac{b^6}{a^6} - \ldots\right].$$

In (2) $b\sqrt{-1}$ für a, a für b und $\frac{1}{3}$ für n gesetzt, gibt, nach der erforderlichen Verkürzung,

$$(4)\ x = \sqrt[3]{(a+b\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(a-b\sqrt{-1})} =$$

$$-2\sqrt[3]{b}\left[\frac{1}{3}\frac{a}{b} - \frac{5}{3^4}\frac{a^3}{b^3} + \frac{5.8.11}{4.5.3^6}\frac{a^5}{b^5} - - \frac{5.8.11.14.17}{4.5.6\,7.3^8}\frac{a^7}{b^7}\ldots\right].$$

Die Wurzeln der Gleichungen

$x^3 = Px - Q$ sind die entgegengesetzten der Gleichung

$x^3 = Px + Q$.

Für die Gleichung

(5) $x^3 = Px \pm Q$

ist hiernach eine Wurzel, nach (3) und (4),

$$\text{I. } x = \pm 2\sqrt[3]{a}\left[1+\frac{1}{3^2}\frac{b^2}{a^2} - \frac{5.8}{4.3^5}\frac{b^4}{a^4} + \frac{5.8.11.14}{4.5.6.3^7}\frac{b^6}{a^6} - \frac{5.8.11.14.17.19}{4.5.6.7.8.3^9}\frac{b^8}{a^8}\ldots\right]$$

oder

$$\text{II. } x = \mp 2\sqrt[3]{b}\left[\frac{1}{3}\frac{a}{b} - \frac{5}{3^4}\frac{a^3}{b^3} + \frac{5.8.11}{4.5\,3^6}\frac{a^5}{b^5} - \right.$$
$$\left. - \frac{5.8.11.14.17}{4.5.6.7.3^8}\frac{a^7}{b^7}\cdots\right],$$

wo $a = \frac{1}{2}Q$, $b = \sqrt{(\frac{1}{27}P^3 - \frac{1}{4}Q^2)}$ ist.

Die Formel I. ist brauchbar, wenn $a > b$, die Formel II. aber im entgegengesetzten Falle.

Ist eine Wurzel der Gleichung gefunden, so setze man diese statt $(p + q)$ in II. Nr. 22) und man erhält die zwei andern Wurzeln eben dieser Gleichung.

Zur Anwendung der vorstehenden Formeln wollen wir die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 = 15x + 12$$

bestimmen.

Hier ist $P = 15$, $Q = 12$,

$$b = \sqrt{(\tfrac{1}{27}P^3 - \tfrac{1}{4}Q^2)} = \sqrt{(125 - 36)} = 9{,}434\ldots$$

$$a = \frac{Q}{2} = 6.$$

Wegen $b > a$ setze man die Werthe für a und b in II., entwickle die drei ersten Glieder der Parenthese und es ergibt sich

$$x = -2.2{,}113[0{,}21200 - 0{,}015880 + 0{,}003140]$$
$$= -0{,}84203.$$

Diese Wurzel für $(p + q)$ in II. Nr. 22) gesetzt, gibt die zwei andern Wurzeln zu

$x = -3{,}3825$; $x = 4{,}2245$, so daß die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 = 15x + 12,$$
$$-0{,}8420;\ -3{,}3825;\ +4{,}2245;$$ sind.

27) Die kubischen Gleichuugen mit drei möglichen Wurzeln lassen sich noch bequemer, als es durch die vorstehenden Formeln I. und II. der Fall ist, durch Einführung trigonometrischer Funktionen auflösen. Die Ableitung der erforderlichen Formeln geschieht wie nachfolgend.

Nach Gründen der Trigonometrie oder Goniometrie ist, für den Radius 1,

$$(1)\ \sin(\alpha+\beta)\text{*)} = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,$$

$$(2)\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$(3)\ \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha.$$

In (1) und (2) $\alpha = \beta$ gesetzt,

$$(4)\ \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$(5)\ \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= 1 - 2\sin^2\alpha.$$

In (1) $\beta = 2\alpha$ gesetzt,

$$\sin(3\alpha) = \sin\alpha\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)\cos\alpha,$$

nach (4) und (5)

$$\sin(3\alpha) = \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha, \text{ nach } (3)$$
$$= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha)$$
$$= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha, \text{ d. g.}$$

$$4\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - \sin(3\alpha),$$

$$(6)\ \sin^3\alpha = \tfrac{3}{4}\sin\alpha - \tfrac{1}{4}\sin(3\alpha).$$

Die vorstehende Gleichung gilt nur für den Radius 1; um sie für den Radius r umzuwandeln sei

$$r\sin\alpha = \text{Sin}\,\alpha, \text{ also auch } r\sin(3\alpha) = \text{Sin}(3\alpha) \text{ d. g.}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{Sin}\,\alpha}{r};\ \sin(3\alpha) = \frac{1}{r}\text{Sin}(3\alpha).$$

Durch Substitution dieser Werthe in (6) ergibt sich

$$\frac{\text{Sin}^3\alpha}{r^3} = \frac{3}{4}\,\frac{\text{Sin}\alpha}{r} - \frac{1}{4}\,\frac{\text{Sin}(3\alpha)}{r} \text{ oder}$$

$$(7)\ \text{Sin}^3\alpha = \tfrac{3}{4}r^2\,\text{Sin}\,\alpha - \tfrac{1}{4}r^2\,\text{Sin}(3\alpha).$$

In dieser Gleichung vom dritten Grade ist Sin α die unbekannte Größe. Durch Zusammenhalten dieser Gleichung mit der Gleichung

$$x^3 = Px - Q \text{ ergibt sich}$$

$$x = \text{Sin}\,\alpha = r\sin\alpha;\ P = \tfrac{3}{4}r^2;\ \tfrac{1}{4}r^2\,\text{Sin}(3\alpha) = Q$$

oder

$$r = \sqrt{\tfrac{4}{3}P};\ \text{Sin}\,3\alpha = \frac{4Q}{r^2}, \text{ oder für den Radius } 1,$$

---

*) Klügels mathem. Wörterbuch, Artikel Goniometrie, Bd. 2. S. 517; Grunerts Lehrbuch der Mathematik, 3ter Theil Seite 29, u. a. a. O.

$$r \sin(3\alpha) = \frac{4Q}{r^2},$$

$$\sin(3\alpha) = \frac{4Q}{r^3}.$$

Hieraus läßt sich 3α finden, und es ist sodann eine Wurzel der Gleichung

$$x = r \sin\alpha = \mathrm{Sin}\,\alpha.$$

Nun ist ferner

$$\sin(3\alpha) = \sin(180 - 3\alpha)$$

$$\sin(3\alpha) = -\sin(180 + 3\alpha) = \sin(-180 - 3\alpha).$$

Daraus folgen noch die Werthe

$$\frac{180 - 3\alpha}{3} = 60 - \alpha \text{ und}$$

$$\frac{-180 - 3\alpha}{3} = -60 - \alpha \text{ für } \alpha,$$ so daß überhaupt wird

$$x = r \sin\left(\frac{3\alpha}{3}\right) = r \sin(\alpha),$$

$$x = r \sin\left(\frac{180 - 3\alpha}{3}\right) = r \sin(60 - \alpha),$$

$$x = r \sin\left(\frac{-180 - 3\alpha}{3}\right) = r \sin(-60 - \alpha) =$$

$- r \sin(60 + \alpha)$, oder es sind die Wurzeln der Gleichung

$$(8)\quad x^3 = Px - Q \text{ für } Q^2 < \tfrac{4}{27}P^3,$$

$$x = r \sin\alpha; \quad x = r \sin(60 - \alpha); \quad x = -r \sin(60 + \alpha).$$

Da ferner die Wurzeln der Gleichung

$x^3 = Px + Q$ nur die entgegengesetzten der Gleichung (8) sind, so erhält man allgemein für die Gleichung

$x^3 = Px \pm Q$, für welche $Q^2 < \frac{4}{27}P^3$ ist, die Wurzeln zu

$$\text{I.}\quad \begin{cases} x = \mp r \sin\alpha \text{*)}, \\ x = \mp r \sin(60 - \alpha), \\ x = \pm r \sin(60 + \alpha), \text{ wobei} \\ r = \sqrt{\tfrac{4}{3}P}; \quad \sin(3\alpha) = \dfrac{4Q}{r^3}. \end{cases}$$

---

*) Diese Wurzeln lassen sich auch durch Kosinusse ausdrücken, oder man erhält die Hülfsgleichung, ähnlich der Gleichung (6),

Zur Anwendung dieser Formeln wollen wir die Wurzeln der Gleichung

$x^3 = 15x + 12$ finden.

Hier ist

$$r = \sqrt{\tfrac{4}{3} \cdot 15} = \sqrt{20} = 4{,}47213;$$

$$\log. \sin(3\alpha) = \log. \frac{4 \cdot 12}{(4{,}47213)^3} = 0{,}7297067 - 1 + 10$$
$$= 9{,}7297067. \text{ d. g.}$$

$$3\alpha = 32^\circ\ 27'\ 26'',$$
$$\alpha = 10^\circ\ 49'\ 8''$$
$$60 - \alpha = 49^\circ\ 10'\ 52''$$
$$60 + \alpha = 70^\circ\ 49'\ 8''.$$
$$x = -r \sin\alpha = -0{,}8394$$
$$x = -r\sin(60 - \alpha) = -3{,}3844$$
$$x = r\sin(60 + \alpha) = 4{,}2238$$

28) Auch die kubischen Gleichungen, welche nur eine mögliche Wurzel haben, die immer mittels der Cardanischen Formel zu ermitteln ist, lassen eine trigonometrische Auflösung zu. Nicht ihres praktischen Nutzens wegen, sondern nur deshalb, weil sie manchem Anfänger interessant sein dürften, mögen sie hier noch eine Stelle finden.

Die kubische Gleichung

(1) $x^3 = Px + Q$, hat zufolge Nr. 25) nur eine reelle Wurzel, wenn

$Q^2 > \frac{4}{27}P^3$, und ist nach I. Nr. 22)

$$x = \sqrt[3]{\left[\frac{Q + \sqrt{(Q^2 - \frac{4}{27}P^3)}}{2}\right]} + \sqrt[3]{\left[\frac{Q - \sqrt{(Q^2 - \frac{4}{27}P^3)}}{2}\right]}$$

$$= \left\{\sqrt[3]{\left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{4P^3}{27Q^2}\right)}\right]} + \right.$$

$$\left. + \sqrt[3]{\left[1 + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{4}{27}\frac{P^3}{Q^2}\right)}\right]}\right\}\sqrt[3]{\frac{Q}{2}}.$$

---

wenn statt der Sinusse die Kosinusse eingeführt werden. Man sehe: Grunert Lehrbuch der Mathematik, Theil 3. S. 75.

Nach den gestellten Bedingungen muß $\frac{4P^3}{27Q^2}$ ein echter Bruch sein, deshalb sei

$$\sin^2\alpha = \frac{4P^3}{27Q^2},$$

ferner

$r = \sqrt{\tfrac{4}{3}P}$. d. g., wenn der letztere Werth in $\sin\alpha$ genommen wird,

$$\sqrt[3]{\frac{Q}{2}} = \frac{r}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\alpha}};\ \sin\alpha = \frac{r^3}{4Q}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Wurzelgleichung ergibt sich

$$x = \frac{r}{2}\left\{\sqrt[3]{\left[\frac{1+\sqrt{(1-\sin^2\alpha)}}{\sin\alpha}\right]} + \sqrt[3]{\left[\frac{1-\sqrt{(1-\sin^2\alpha)}}{\sin^2\alpha}\right]}\right\}$$

$$= \frac{r}{2}\left\{\sqrt[3]{\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}} + \sqrt[3]{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{r}{2}\left\{\sqrt[3]{\frac{2\cos^2(\frac{1}{2}\alpha)}{2\sin(\frac{1}{2}\alpha)\cos(\frac{1}{2}\alpha)}} + \sqrt[3]{\frac{2\sin^2(\frac{1}{2}\alpha)}{2\sin(\frac{1}{2}\alpha)\cos(\frac{1}{2}\alpha)}}\right\} =$$

$$= \frac{r}{2}\left\{\sqrt[3]{\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}\alpha)} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\alpha)}\right\}.$$

$\sqrt[3]{\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\alpha)} = \operatorname{tg}\beta$, also auch $\sqrt[3]{\operatorname{cotg}(\frac{1}{2}\alpha)} = \operatorname{cotg}\beta$ gesetzt, gibt

$$x = \frac{r}{2}\left\{\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{tg}\beta\right\} = \frac{r}{2}\left\{\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right\} =$$

$$= \frac{r}{2}\left\{\frac{\cos^2\beta + \sin^2\beta}{2\sin\beta\cos\beta}\right\},$$

$$x = \frac{r}{2\sin\beta\cos\beta} = \frac{r}{\sin(2\beta)}.$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 = Px - Q$$

sind die entgegengesetzten der Gleichung (1): man erhält demgemäß für die Gleichung

$x^3 = Px \pm Q$, wenn $Q^2 > \frac{4}{27}P^3$ ist,

$$\text{I.}\quad\begin{cases} x = \pm \dfrac{r}{\sin(2\beta)} \\ \operatorname{tg}\beta = \sqrt[3]{\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\alpha)};\ \sin\alpha = \dfrac{r^3}{4Q};\quad r = \sqrt{\tfrac{4}{3}P}. \end{cases}$$

Die Gleichung

$$x^3 = -Px \pm Q$$

hat immer nur eine reelle Wurzel, es mag $Q^2 \lesseqgtr \frac{4}{27}P^3$ sein.

Für die Gleichung

$x^3 = -Px + Q$ ist die eine reelle Wurzel

$$(3)\quad x = \left\{\sqrt[3]{\left[1 + \sqrt{\left(1 + \frac{4P^3}{27Q^2}\right)}\right]} + \right.$$

$$\left. + \sqrt[3]{\left[1 - \sqrt{\left(1 + \frac{4P^3}{27Q^2}\right)}\right]}\right\}\sqrt[3]{\frac{Q}{2}}.$$

Da $\frac{4P^3}{27Q^2} \gtrless 1$ sein kann, so sei

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{4P^3}{27Q^2},\ \text{ferner}\ r = \sqrt{\tfrac{4}{3}P}\ \text{d. g.}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r^3}{4Q};\quad \sqrt[3]{\frac{Q}{2}} = \frac{r}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}.$$

Diese Werthe in (3) substituirt, so wird

$$x = \frac{r}{2}\left\{\sqrt[3]{[1+\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}]} + \sqrt[3]{[1-\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}]}\right\}\sqrt[3]{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}} =$$

$$= \frac{r}{2}\left\{\sqrt[3]{\frac{1+\sec\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}} + \sqrt[3]{\frac{1-\sec\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}}\right\} =$$

$$= \frac{r}{2}\left\{\sqrt[3]{\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha}} - \sqrt[3]{\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha}}\right\},$$ weil $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ ist,

$$= \frac{r}{2}\left\{\sqrt[3]{\frac{2\cos^2(\frac{1}{2}\alpha)}{2\sin(\frac{1}{2}\alpha)\cos(\frac{1}{2}\alpha)}} - \sqrt[3]{\frac{2\sin^2(\frac{1}{2}\alpha)}{2\sin(\frac{1}{2}\alpha)\cos(\frac{1}{2}\alpha)}}\right\}$$

$$= \frac{r}{2}\left\{\sqrt[3]{\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}\alpha)} - \sqrt[3]{\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\alpha)}\right\},$$ $\sqrt[3]{\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\alpha)} = \operatorname{tg}\beta$ gesetzt,

$$x = \frac{r}{2}\left\{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{tg}\beta\right\} = \frac{r}{2}\left\{\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right\} =$$

$$= \frac{r}{2} \frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{2\sin\beta\cos\beta},$$

$$x = r\frac{\cos(2\beta)}{\sin(2\beta)} = r\operatorname{cotg}(2\beta) = \frac{r}{\operatorname{tg}(2\beta)}.$$

Demgemäß ist die Wurzel der Gleichung

$$x^3 = - Px \pm Q$$

$$\text{II.} \begin{cases} x = \pm \dfrac{r}{\operatorname{tg}(2\beta)}, \text{ wo} \\ \operatorname{tg}\beta = \sqrt[3]{\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\alpha)};\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{r^3}{4Q};\ r = \sqrt{\frac{4}{3}P} \text{ ist.} \end{cases}$$

Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

29) Für die direkte Bestimmung der Wurzeln einer biquadratischen Gleichung gibt es mehre Methoden; doch sind sie durchschnittlich schon ziemlich weitläufig, wenn man sie auf einen besondern Fall anwendet. Die noch einfachste Methode mag hier folgen.

Es sei $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ die Wurzel einer biquadratischen Gleichung. Diese Wurzel auf die zweite Potenz erhoben,

$$x^2 = p + q + r + 2(\sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr}).$$

Der Kürze halber sei $p + q + r = A$, sonach

$$x^2 - A = 2(\sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr}).$$

Nochmals quadrirt

$$x^4 - 2Ax^2 + A^2 = 4[pq + pr + qr + \\ + 2(\sqrt{p^2qr} + \sqrt{pq^2r} + \sqrt{pqr^2})]$$

$$x^4 - 2Ax^2 + A^2 = 4[pq + pr + qr + \\ + 2(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})\sqrt{pqr}].$$

Der Kürze wegen

$pq + pr + qr = B$; $pqr = C$ und für $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ seinen Werth x gesetzt, gibt

$$x^4 - 2Ax^2 + A^2 = 4B + 8x\sqrt{C},$$

$$(1)\ x^4 = 2Ax^2 + 8x\sqrt{C} + (4B - A^2),$$

von welcher Gleichung eine Wurzel

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \text{ ist.}$$

Nach der Annahme ist

$$A = p + q + r;\ B = pq + pr + qr;\ C = pqr;$$

folglich sind p, q, r Wurzeln der kubischen Gleichung

$$(2)\ z^3 - Az^2 + Bz - C = 0 \text{ oder}$$

$$z^3 = Az^2 - Bz + C.$$

Die Gleichung (1) als mit der Gleichung

$$x^4 = Px^2 + Qx + R$$

identisch angenommen, so wird

$$2A = P;\ A = \tfrac{1}{2}P;\ 8\sqrt{C} = Q;\ C = \frac{Q^2}{64};$$

$$4B - A^2 = R;\ B = \tfrac{1}{4}R + \tfrac{1}{16}P^2;$$ folglich ist die der Gleichung

$$(3)\ x^4 = Px^2 + Qx + R$$

entsprechende Hülfsgleichung

$$(4)\ z^3 - \tfrac{1}{2}Pz^2 + (\tfrac{1}{4}R + \tfrac{1}{16}P^2)z - \frac{Q^2}{64} = 0,$$

welche nach dem Vorstehenden so beschaffen, daß wenn die Wurzeln derselben p, q, r sind, eine der biquadratischen Gleichung (3) zugehörende Wurzel

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \text{ ist.}$$

Da ferner jede Quadratwurzel + oder — genommen, den Forderungen genügen kann, so leiten sich aus den Wurzeln der kubischen Hülfsgleichung überhaupt folgende Zusammenstellungen ab, wo jede eine Wurzel der biquadratischen Gleichung sein kann.

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$$
$$\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$$
$$-\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$$
$$-\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$$
$$\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$$
$$\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$$
$$-\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$$
$$-\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r};$$ und es ist sehr leicht denkbar, daß in diesen Verbindungen alle Wurzeln der biquadratischen Gleichung enthalten sind.

Nun ist in Beziehung auf (1) und (4)

$$8\sqrt{C} = Q, \text{ aber } C = pqr, \text{ also}$$

$$Q = 8\sqrt{C} = 8\sqrt{pqr} = 8\sqrt{p}.\sqrt{q}.\sqrt{r}.$$

Für die Gleichung (3), in der der Koeffizient von x positiv ist, müssen die Theile einer jeden Wurzel so beschaffen sein, daß ihr Produkt eine positive Größe gibt. Dieser Bedingung leisten aber die drei ersten Zusammenstellungen Genüge: es ist folglich für die biquadratische Gleichung

I.

$x^4 = Px^2 + Qx + R$, die Hülfsgleichung, deren Wurzeln p, q, r sind,

$$z^3 - \tfrac{1}{2}Pz^2 + (\tfrac{1}{4}R + \tfrac{1}{16}P^2)z - \frac{Q^2}{16} = 0,$$

und die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$$
$$x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$$
$$x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$$
$$x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}.$$

Ist in der Gleichung (3) Q negativ, so wird

$-Q = 8\sqrt{C} = 8\sqrt{p}.\sqrt{q}.\sqrt{r}$, oder es müssen die Theile der Wuerzl einer biquadratischen Gleichung ein negatives Produkt geben. Dieser Bedingung genügen aber die vier letzten der obigen Zusammenstellung; oder es ist für die biquadratische Gleichung

II.

$x^4 = Px^2 - Qx + R$ die kubische Hülfsgleichung

$$z^3 - \tfrac{1}{2}Pz^2 + (\tfrac{1}{4}R + \tfrac{1}{16}P^2)z - \frac{Q^2}{16} = 0,$$

und wenn die Wurzeln dieser p, q, r sind, so werden die Wurzeln der biquadratischen Gleichung sein

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$$
$$x = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$$
$$x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$$
$$x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}.$$

Die hier bestimmte Formel entdeckte der unsterbliche Leon-

hard Euler*), und wird nach ihm die Eulersche Auflösungs-Methode der biquadratischen Gleichungen genannt.

Außer der eben vorgetragenen Eulerschen Auflösungs-Methode biquadratischer Gleichungen gibt es noch mehre, und zwar die Methode des Bombelli, des Descartes und Waring.

Die Methode des Bombelli besteht, ähnlich der von Euler, darin, die Wurzeln der biquadratischen Gleichung von den Wurzeln einer kubischen abhängig zu machen. Nach Descartes Methode wird die biquadratische in zwei quadratische Gleichungen zerlegt. Waring endlich setzt eine Wurzel der biquadratischen Gleichung aus den Theilen p, q, r zusammen, entwickelt daraus die sogenannte Normalgleichung, setzt eine vorgegebene biquadratische Gleichung dieser identisch und entwickelt so die Theile p, q, r einer Wurzel der biquadratischen Gleichung **)

Weil wir der Eulerschen Methode zur Auflösung der biquadratischen Gleichungen den Vorzug geben, lassen wir die andern weg und wollen nur zur Anwendung dieser noch eine biquadratische Gleichung auflösen, die sich in Eulers Algebra selbst findet.

a) Es sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 = 25x^2 - 60x + 36$$

zu finden.

Nach II. ist die Hülfsgleichung

$$z^3 - \tfrac{1}{2}.25z^2 + (\tfrac{1}{4}.36 + \tfrac{1}{16}.25^2)z - \frac{60^2}{16} = 0$$

oder

$$z^3 - \tfrac{25}{2}z^2 + \tfrac{769}{16}z - \tfrac{3600}{16} = 0.$$

Diese Gleichung in eine andere verwandelt, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind, gibt nach Nr. 4)

$$y^3 - 50y^2 + 769y - 14400 = 0, \text{ wo } z = \tfrac{1}{4}y \text{ ist.}$$

---

*) Man sehe dessen „vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra, nach der französischen Ausgabe des de la Grange, von Grüson; Berlin 1797; Theil II. Seite 141". Auch in Klügels mathematischem Wörterbuche, Band 2., Seite 408 ist sie vorgetragen.

**) Bombelli's Methode findet man noch im zweiten Theile von Eulers Anleitung zur niedern und höhern Algebra; alle vier Methoden aber in Klügels mathematischem Wörterbuche, Band 2., Artikel Gleichung.

Dieser Gleichung entsprechen, wie man sich leicht überzeugt, die Wurzeln 9, 16, 25. Demgemäß ist, in Beziehung auf die kubische Hülfsgleichung,

$$p = \frac{9}{4};\quad q = \frac{16}{4};\quad r = \frac{25}{4},$$

$$\sqrt{p} = \frac{3}{2};\quad \sqrt{q} = 2;\quad \sqrt{r} = \frac{5}{2},$$ und die Wurzeln der biquadratischen Gleichung nach II.,

$$x = \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1$$
$$x = \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2$$
$$x = -\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 3$$
$$x = -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6.$$

Auflösung der Gleichungen durch Näherung.

30) Obschon die Methoden, mittels deren die Wurzeln einer Gleichung direkt bestimmt werden können, nur bis zu den Gleichungen vom vierten Grade reichen: so ist man dessen ungeachtet im Stande, eine Wurzel irgend einer Gleichung so genau zu bestimmen, als es nur die Umstände erfordern. Diese Bestimmungsweise einer Wurzel einer höhern Gleichung heißt die durch Näherung. Der Methoden, eine Wurzel einer Gleichung durch Näherung zu bestimmen, gibt es viele. Wir werden nur drei, die uns die einfachsten scheinen, hier anführen; wer sich mit den übrigen vertraut machen will, lese den Abschnitt IX. und X. des Artikels Gleichung in Klügels mathematischem Wörterbuche.

Die erste der hier anzuführenden Näherungsmethoden setzt voraus, daß man von der zu bestimmenden Wurzel weiß, zwischen welchen zwei ganzen Zahlen sie liegt, was immer leicht zu ermitteln ist.

Es sei p eine genäherte Wurzel der Gleichung

(1) $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = 0,$

oder $p < x$ und $p + 1 > x$.

Der an p fehlende Theil, um eine wahre Wurzel der Gleichung (1) zu sein, sei r, also

$x = p + r$ oder $r < 1$.

Jetzt $p + r$ statt x gesetzt, gibt nach (4) Nr. 5), weil hier p mit dem dortigen y, und r mit dem dortigen h identisch

ist, wenn in der Entwickelung alle die Glieder weggelassen werden, in denen r in der zweiten und in höhern Potenzen vorkommt,

$$p^n + nrp^{n-1} + Ap^{n-1} + (n-1)Arp^{n-2} + Bp^{n-2} + (n-2)rBp^{n-3} + Cp^{n-3} \ldots Pp + Pr + Q = 0.$$

Daraus folgt

$$(2)\ r = -\frac{p^n + Ap^{n-1} + Bp^{n-2} + Cp^{n-3} \ldots Pp + Q}{np^{n-1} + (n-1)Ap^{n-2} + (n-2)Bp^{n-3} \ldots P}.$$

Die höhern Potenzen von r können deshalb weggelassen werden, weil diese kleiner als r selbst sind; daraus aber folgt, daß der durch (2) bestimmte Werth noch nicht der ist, welcher p zu einer wahren Wurzel der Gleichung ergänzt: dieser Werth zu p genommen, wird die Wurzel nur näher angeben, als es durch p geschieht. Den so bestimmten Werth der Wurzel statt p in (2) gesetzt, wird für r einen Werth entwickeln, der zu p genommen, die Wurzel noch näher bestimmt als vorher. Auf gleiche Weise die Rechnung fortgesetzt, wird immer richtigere Werthe für die zu bestimmende Wurzel geben.

In (1) und (2) 2, 3, 4, 5... für n gesetzt, gibt

$$\text{I.}\ \begin{cases} x^2 + Ax + B = 0 \\ r = -\dfrac{p^2 + Ap + B}{2p + A} \end{cases}$$

$$\text{II.}\ \begin{cases} x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \\ r = -\dfrac{p^3 + Ap^2 + Bp + C}{3p^2 + 2Ap + B} \end{cases}$$

$$\text{III.}\ \begin{cases} x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \\ r = -\dfrac{p^4 + Ap^3 + Bp^2 + Cp + D}{4p^3 + 3Ap^2 + 2Bp + C} \end{cases}$$

$$\text{IV.}\ \begin{cases} x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \\ r = -\dfrac{p^5 + Ap^4 + Bp^3 + Cp^2 + Dp + E}{5p^4 + 4Ap^3 + 3Bp^2 + 2Cp + D} \end{cases}$$

u. s. f.

Das Vorstehende wollen wir jetzt durch einige Beispiele erläutern.

In der Gleichung

$$(a)\ x^3 - 8x^2 + 7x - 72 = 0,$$

erstens 8 und zweitens 9 für x gesetzt, gibt

$$512 - 512 + 56 - 72 = -16;$$

$729 - 648 + 56 - 72 = 65$: woraus folgt, daß eine Wurzel der Gleichung (a) zwischen 8 und 9 liegt.

Nach II. ist für (a)

$$(b)\ r = -\frac{p^3 - 8p^2 + 7p - 72}{3p^2 - 16p + 7}.$$

Hierein 8 für p gesetzt, entwickelt

$$r = -\frac{512 - 512 + 56 - 72}{3 \cdot 64 - 2 \cdot 64 + 7} = \tfrac{16}{71} = 0{,}225.$$

Hiernach ist eine Wurzel der Gleichung (a) schon ziemlich genau

$$x = p + r = 8 + 0{,}225 = 8{,}225.$$

Zur weitern Berichtigung der Wurzel 8,225 für p in (b) genommen, und man erhält

$$r = -0{,}0004 \text{ d. g.}$$

$x = p + r = 8{,}225 - 0{,}0004 = 8{,}2246$, welches eine Wurzel der Gleichung (a), bis auf Tausendtheilchen genau ist.

Eine Wurzel der biquadratischen Gleichung

(c) $x^4 - 3x^2 + 4x - 32 = 0$, liegt zwischen 2 und 3.

Nach III. ist der an der Wurzel fehlende Theil

$$(d)\ r = -\frac{p^4 - 3p^2 + 4p - 32}{4p^3 - 6p + 4}.$$

In (d) 2,5 für p gesetzt, entwickelt

$$r = \frac{1{,}6875}{51{,}5} = 0{,}032 \text{ d. g.}$$

$x = p + r = 2{,}5 + 0{,}032 = 2{,}532$ bis zu den Hunderttheilchen genau.

31) Bei der Bestimmung der Wurzeln einer höhern Gleichung durch Näherung wird die Grenzbestimmung der einzelnen Wurzeln, durch die Grenze der größten positiven und negativen Wurzel erleichtert. So ist, in Beziehung auf Nr. 17), für die Gleichung

$$(a)\ x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 24x - 14 = 0$$

die größte positive Wurzel nicht größer als

$1 + \sqrt[n]{M} = 1 + \sqrt[3]{24} = 4$, und die größte negative Wurzel nicht größer als

$$1 + \sqrt[n]{M} = 1 + 14 = 15.$$

In die Gleichung (a) 4, 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, — 3, — 4 gesetzt, gibt

578 für $x = 4$,
196 „ $x = 3$,
14 „ $x = 2$,
— 28 „ $x = 1$,
— 4 „ $x = 0$,
+ 8 „ $x = -1$,
+ 14 „ $x = -2$,
+ 4 „ $x = -3$,
— 98 „ $x = -4$.

Hiernach liegen Wurzeln der Gleichung (a) zwischen 1 und 2, zwischen 0 und — 1 und zwischen — 3 und — 4.

Nach III. Nr. 30) ist der an der Wurzel fehlende Theil der Gleichung (a)

$$(b)\ r = -\frac{p^4 + 6p^3 + 3p^2 - 24p - 14}{4p^3 + 18p^2 + 6p - 24}.$$

Hierein 2 für p, gibt

$r = -\frac{14}{92} = -0,152$; folglich
$x = p + r = 2 - 0,152 = 1,848.$

Diesen Werth wieder statt p in (b) gesetzt,

$r = -\frac{1,4230}{74,8042} = -0,01902$ d. g.

$x = p + r = 1,848 - 0,01902 = 1,828$, welche Wurzel auf die Tausendtheilchen genau ist.

Die Wurzel, welche zwischen 0 und — 1 liegt, sei —0,4. Diesen Werth in (b) genommen, gibt

$r = -\frac{4,278}{23,776} = -0,179$; folglich
$x = p + r = -0,4 - 0,179 = -0,579.$

Diesen Werth nochmals statt p in (b) genommen, und man erhält

$$r = -\frac{0{,}1704}{22{,}4122} = -0{,}0076;\ \text{d. g.}$$

$$x = p + r = -0{,}58 - 0{,}0076 = -0{,}5876$$
$$= -0{,}587.$$

Eine dritte Wurzel der Gleichung (a) liegt zwischen -3 und -4 und sei $-3{,}4$. Diesen Werth in (b) gesetzt, gibt den fehlenden Theil zu

$$r = -0{,}01386;\ \text{sonach}$$
$$x = p + r = -3{,}4 - 0{,}01386 = -3{,}414,$$

welche Wurzel schon bis auf die Tausendtheilchen genau ist.

Drei Wurzeln der biquadratischen Gleichung zeigten sich bereits als reell, weshalb auch die vierte reell sein muß.

Zufolge Nr. 9) bringt die Summe der entgegengesetzten Wurzeln einer Gleichung den Koeffizienten von x^{n-1} hervor: die noch fehlende Wurzel der Gleichung (a) durch x bezeichnet, gibt

$$6 = -1{,}828 + 0{,}587 + 3{,}414 - x,$$
$$x = 2{,}173 - 6 = -3{,}827.$$

Alle vier Wurzeln der Gleichung (a) sind nun bis auf Tausendtheilchen genau

$$x = 1{,}828$$
$$x = -0{,}587$$
$$x = -3{,}414$$
$$x = -3{,}827.$$

32) Für die Gleichung

$$(1)\ x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots Px + Q = 0$$

liege eine Wurzel zwischen p und q, so daß p und q höchstens um 1 von einander verschieden sind. Ferner gebe die Gleichung (1), wenn p für x gesetzt, den Rest $\pm R$ und wenn q für x gesetzt wird, den Rest $\mp S$, welche Verschiedenheit der Zeichen der Reste stattfinden muß, wenn die wahre Wurzel zwischen p und q liegen soll. Da p kleiner und q größer als die wahre Wurzel ist, so sei die zwischen p und q liegende genäherte Wurzel, welche der wahren Wurzel näher liegt als p und q und der wahren Wurzel gleich zu setzen ist, gleich r. Der Rest $\pm R$ ergab sich, weil die Wurzel um $(r - p)$ zu klein, und der Rest

$\mp S$, weil die Wurzel um $(q - r)$ zu groß gewählt wurde. Wenn nun diese Differenzen nur gering sind, so werden sie sich ziemlich genau wie die Reste, mit Nichtberücksichtigung ihrer Vorzeichen, verhalten; oder es wird stattfinden

$R : S = r - p : q - r$, woraus folgt

$$(2)\ r = \frac{Rq + Sp}{R + S} = p + \frac{(q-p)R}{R+S}.$$

Diese Formel ist besonders dann brauchbar, wenn die Wurzel bereits bis auf die Zehntel genau bestimmt ist.

Eine Wurzel der Gleichung

(a) $x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 24x - 14 = 0$ liegt zufolge Nr. 31) zwischen 1,8 und 1,9.

Für x den Werth 1,8 in a gesetzt, gibt den Rest $-1,9904$,
" x " " 1,9 " a " " " " 5,4161.

Jetzt 1,9904 für R; 5,4161 für S; 1,8 für p und 1,9 für q in (1) gesetzt und man erhält

$$r = \frac{13,53074}{7,4065} = 1,82768 = 1,828,$$

welche Wurzel bereits in Nr. 31) gefunden wurde. Daß dieses Verfahren beliebig weit fortgesetzt werden kann und bequemer als das in Nr. 31) beschriebene ist, ist klar.

Sollten p und q negativ sein, dann ist nothwendig auch r negativ zu nehmen.

33) Für die Gleichungen

$$(1)\ x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots Px + Q = 0,$$

$$(2)\ y^n + \frac{A}{\alpha}y^{n-1} + \frac{B}{\alpha^2}y^{n-2} + \frac{C}{\alpha^3}y^{n-3} \ldots \frac{P}{\alpha^{n-1}}y + \frac{Q}{\alpha^n} = 0,$$

ist $x = \alpha y$.

Durch das in Nr. 7) angegebene Verfahren ließen sich nun leicht aus den Koeffizienten der Gleichung (2) die Koeffizienten für $y-1$, $y-2$, $y-3 \ldots$ herleiten. Nach der Annahme findet nun statt

$$y - 1 = \frac{x}{\alpha} - 1 = \frac{x - \alpha}{\alpha},$$

$$y-2=\frac{x-2\alpha}{\alpha},$$

$$y-3=\frac{x-3\alpha}{\alpha}$$ u. s. f. Daraus folgt

$$\alpha(y-1)=x-\alpha,$$
$$\alpha(y-2)=x-2\alpha,$$
$$\alpha(y-3)=x-3\alpha$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha(y-p)=x-p\alpha.$$

Allgemein sei nun

$$(3)\ (y-p)^n+A_{,}(y-p)^{n-1}+B_{,}(y-p)^{n-2}+ C_{,}(y-p)^{n-3}\ldots P_{,}(y-p)+Q_{,}=0.$$

Wegen $\alpha(y-p)=x-p\alpha$ sind die Wurzeln der Gleichung (3) αmal kleiner als $x-p\alpha$: multiplizirt man folglich die Koeffizienten $A_{,}$, $B_{,}$, $C\ldots$ mit den auf einanderfolgenden Potenzen von α, so sind die Wurzeln der entstehenden Gleichung $x-p\alpha$; oder es wird aus (3)

$$(4)\ (x-p\alpha)^n+A_{,}\alpha(x-p\alpha)^{n-1}+B_{,}\alpha^2(x-p\alpha)^{n-2}+ + C_{,}\alpha^3(\alpha-p\alpha)^{n-3}\ldots P_{,}\alpha^{n-1}(x-p\alpha)+Q_{,}x^n=0.$$

Die Gleichung

$$x^3+8x^2+15x-32=0$$

mit (1) verglichen, und in Beziehung auf (2), $\alpha=10$ gesetzt, gibt $y^3+0{,}8y^2+0{,}15y-0{,}32=0$. Hieraus folgt nach Nr. 7)

$$(y-1)^3+3{,}8(y-1)^2+4{,}75(y-1)+1{,}918=0$$
$$(y-2)^3+6{,}8(y-1)^2+15{,}35(y-1)+11{,}46=0$$

u. s. f. In Rücksicht auf (3) und (4) wird hieraus

$$(x-10)^3+38(x-10)^2+475(x-10)+1918=0$$
$$(x-20)^3+68(x-20)^2+1535(x-20)+11468=0$$

u. s. f.

Die hier behandelte Umänderung einer Gleichung kann besonders dazu verwendet werden, die Grenzen der einzeln Wurzeln einer Gleichung zu bestimmen. Findet man z. E. für die Gleichung

$$(a)\ x^4-10x^3-423x^2+3128x+24000=0$$

wie vorstehend die Koeffizienten für $x-10$, $x-20$, $x-30$ u. s. f., so erhält man

$$y^4 - y^3 - 4{,}23y^2 + 3{,}128y + 2{,}4 = 0,$$

$$(y-1)^4 + 3(y-1)^3 - 1{,}23(y-1)^2 - 4{,}332(y-1) + 1{,}298 = 0$$

$$(y-2)^4 + 7(y-2)^3 + 13{,}77(y-2) + 6{,}208(y-2) - 0{,}264 = 0$$

$$(y-3)^4 + 11(y-3)^3 + 40{,}77(y-3) + 58{,}748(y-3) + 27{,}714 = 0.$$

u. s. f. und

$$x^4 - 10x^3 - 423x^2 + 3128x + 24000 = 0,$$

$$(x-10)^4 + 30(x-10)^3 - 123(x-10)^2 - 4332(x-10) + 12980 = 0$$

$$(x-20)^4 + 70(x-20)^3 + 1377(x-20)^2 + 6208(x-20) - 2640 = 0$$

$$(x-30)^4 + 110(x-30)^3 + 4077(x-30)^2 + 58748(x-30) + 277140 = 0.$$

Diese Veränderungen geben nun zu erkennen, daß eine Wurzel der Gleichung (a) zwischen 10 und 20, eine zweite zwischen 20 und 30 liegt und daß die Gleichung keine größere positive Wurzel hat, weil die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von x sämmtlich positiv sind: die zwei andern Wurzeln der Gleichung (a) sind demgemäß negativ oder imaginär.

Die Koeffizienten der ungeraden Potenzen von x in (a) entgegengesetzt genommen, gibt

$$\text{(b)} \quad x^4 + 10x^3 - 423x^2 - 3128x + 24000 = 0$$

und die positiven Wurzeln dieser Gleichung sind die negativen der Gleichung (a).

Hieraus wie vorstehend, die Koeffizienten für x-10, x-20 ... gefunden, gibt

$$x^4 + 10x^3 - 423x^2 - 3128x + 24000 = 0$$

$$(x-10)^4 + 50(x-10)^3 + 2577(x-10)^2 - 4588(x-10) - 2958 = 0$$

$$(x-20)^4 + 90(x-20)^3 + 477(x-20)^2 + 23952(x-20) + 32240 = 0.$$

Diesen Entwickelungen gemäß liegt eine positive Wurzel der Gleichung (b) oder eine negative der Gleichung (a) zwischen 1 und 10 und eine zweite zwischen 10 und 20.

Die nähern Grenzen endlich sind auch mittels des in Nr. 7) gezeigten Verfahrens zu ermitteln. So z. B. ist, in Hinsicht auf die Gleichung (a) gefunden worden

$$(x-10)^4+30(x-10)^3-123(x-10)^2-4332(x-10)+12980=0.$$

Jetzt $x-10$ als z genommen und aus den vorstehenden Koeffizienten die für $z-1$, $z-2$, $z-3$ ... gefunden und man erhält

$$(x-11)^4+34(x-11)^3-27(x-11)^2-4484(x-11)+8556=0$$

$$(c)\ (x-12)^4+38(x-12)^3+81(x-12)^2-4432(x-12)+4080=0$$

$$(x-13)^4+42(x-13)^3+201(x-13)^2-4152(x-13)-232=0,$$

woraus ersichtlich ist, daß eine Wurzel der Gleichung (a) zwischen $+12$ und $+13$ liegt. Ebenso findet man, daß die zweite positive Wurzel der Gleichung (a) zwischen 20 und 21, eine positive Wurzel der Gleichung (b) oder eine negative der Gleichung (a) zwischen 4 und 5 und die zweite negative Wurzel der Gleichung (a) zwischen 18 und 19 liegt.

Die oben gezeigte Bestimmung der Koeffizienten für $x-\alpha$, $x-2\alpha$, $x-3\alpha$ ... bezogen auf eine Gleichung (1), kann auch, da für α jeder beliebige Werth zu setzen ist, zur Bestimmung der Grenzwerthe der Wurzeln einer Gleichung bis auf Zehntel, Hundertel, Tausentel ... gebraucht werden. So gibt (c), $x-12=z$ gesetzt, die Gleichung

$$z^4+38z^3+81z^2-4432z+4080=0,$$ und

wenn sie mit (1) verglichen und in Rücksicht auf (2), (3) und (4) daselbst $\alpha=\frac{1}{10}$ genommen, die Koeffizienten für $z-0{,}1$; $z-0{,}2$ ... oder für

$(x-12{,}1)$, $(x-12{,}2)$, $(x-12{,}3)$ ... zu

$$(x-12{,}1)^4+38{,}4(x-12{,}1)^3+92{,}46(x-12{,}1)^2-4414{,}656(x-12{,}1)+3637{,}6481=0,$$

$$(x-12{,}2)^4+38{,}8(x-12{,}2)^3+104{,}04(x-12{,}2)^2-4395{,}008(x-12{,}2)+3197{,}1456=0,$$

$(x-12{,}3)^4 + 39{,}2(x-12{,}3)^3 + 115{,}74(x-12{,}3)^2 -$
$4373{,}032(x-12{,}3) + 2758{,}7241 = 0,$

$(x-12{,}4)^4 + 39{,}6(x-12{,}4)^3 + 127{,}56(x-12{,}4)^2 -$
$4348{,}704(x-12{,}4) + 2322{,}6176 = 0,$

$(x-12{,}5)^4 + 40{,}0(x-12{,}5)^3 + 139{,}50(x-12{,}5)^2 -$
$4322{,}000(x-12{,}5) + 1889{,}0625 = 0,$

$(x-12{,}6)^4 + 40{,}4(x-12{,}6)^3 + 151{,}56(x-12{,}6)^2 -$
$4292{,}869(x-12{,}6) + 1458{,}2976 = 0,$

$(x-12{,}7)^4 + 40{,}8(x-12{,}7)^3 + 163{,}74(x-12{,}7)^2 -$
$4261{,}368(x-12{,}7) + 1030{,}5641 = 0,$

$(x-12{,}8)^4 + 41{,}2(x-12{,}8)^3 + 176{,}04(x-12{,}8)^2 -$
$4227{,}392(x-12{,}8) + 606{,}1056 = 0$

(d) $(x-12{,}9)^4 + 41{,}6(x-12{,}9)^3 + 188{,}46(x-12{,}9)^2 -$
$4190{,}944(x-12{,}9) + 185{,}1681 = 0,$

$(x-13)^4 + 42(x-13)^3 + 201(x-13)^2 - 4152(x-13) -$
$232 = 0.$

Diese Entwickelung gibt zu erkennen, daß eine Wurzel der Gleichung (a) zwischen 12,9 und 13 liegt.

Für die Gleichung (d) sei in Rücksicht auf (1), (2), (3) und (4) $\alpha = 100$, so sind die Koeffizienten für

$(x-12{,}91)$ $1 + 41{,}64 + 189{,}7086 - 4187{,}162316 +$
$+ 143{,}27754761$

$(x-12{,}92)$ $1 + 41{,}68 + 190{,}9584 - 4183{,}355648 +$
$+ 101{,}42493696$

$(x-12{,}93)$ $1 + 41{,}72 + 192{,}2094 - 4179{,}526972 +$
$59{,}61051801$

(e) $(x-12{,}94)$ $1 + 41{,}76 + 193{,}4616 - 4175{,}667264 +$
$+ 17{,}83454096$

$(x-12{,}95)$ $1 + 41{,}8 + 194{,}715 - 4171{,}7855 -$
$23{,}90274375.$

Hiernach liegt die eine Wurzel der Gleichung (a) zwischen 12,94 und 12,95.

Das vorstehende Verfahren noch weiter fortgesetzt, gibt die Wurzel zu

$x = 12{,}94427 \ldots$

Nach (c) liegt die zu bestimmende Wurzel zwischen 12,94 und 12,95. Diese Werthe statt x in die Gleichung (a) gesetzt, gibt die Reste

$+ 17{,}83454096 = R$

$- 23{,}90274375 = - S$. Demgemäß ist nach (2) Nr. 32) wegen $p = 12{,}94$; $q = 12{,}95$

$$r = p + \frac{(q - p)R}{R + S} = 12{,}944273 \ldots$$

Elimination einer unbekannten Größe aus zwei Gleichungen, wenn diese in der dritten und in höhern Potenzen vorkommt.

35) Es sei aus den Gleichungen

(1) $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots Ox^2 + Px + Q = 0$,

(2) $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \ldots ox^2 + px + q = 0$ die Größe x zu eliminiren.

Zu diesem Ende die Gleichung (1) mit (a), die (2) mit A multiplizirt, und das letztere Produkt vom erstern abgezogen, gibt

$(aB - Ab)x^{n-1} + (aC - Ac)x^{n-2} + (aD - Ad)x^{n-3} \ldots$ $(aP - Ap)x + (aQ - Aq) = 0$, oder, wenn zur Abkürzung

(a) $aB - Ab = A_1$; $aC - Ac = B_1 \ldots$; $aP - Ap = O_1$; $aQ - Aq = P_1$ gesetzt wird,

(3) $A_1 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + C_1 x^{n-3} + D_1 x^{n-4} \ldots O_1 x + P_1 = 0$.

Die Gleichung (1) mit q, die Gleichung (2) mit Q multiplizirt und das letztere Produkt vom erstern abgezogen, läßt, wenn die Differenz durch x dividirt wird,

$(qA - Qa)x^{n-1} + (qB - Qb)x^{n-2} + (qC - Qc)x^{n-3} \ldots$ $(qO - Qo)x + (qP - Qp) = 0$, oder wenn

(b) $qA - Qa = a_1$; $qB - Qb = b_1 \ldots qO - Qo = o$; $qP - Qp = p$ genommen,

(4) $a_1 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + c_1 x^{n-3} \ldots ox + p = 0$.

Mit den Gleichungen (3) und (4) eben die Veränderungen vorgenommen, welche dienten, aus (1) und (2) die Gleichungen (3) und (4) abzuleiten, die gefundenen Gleichungen denselben Veränderungen unterworfen und so fortgefahren, gibt

$$\begin{cases} A_2x^{n-2} + B_2x^{n-3} + C_2x^{n-4} \ldots Nx + O = 0 \\ a_2x^{n-2} + b_2x^{n-3} + c_2x^{n-4} \ldots nx + o = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3x^{n-3} + B_3x^{n-4} + C_3x^{n-5} \ldots Mx + N = 0 \\ a_3x^{n-3} + b_3x^{n-4} + c^3x^{n-5} \ldots mx + N = 0 \end{cases}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{cases} A_{n-1}x + B_{n-1} = 0 \\ a_{n-1}x + b_{n-1} = 0 \text{ und hieraus folgt} \end{cases}$$

$$\text{I. } a_{n-1}B_{n-1} - A_{n-1}b_{n-1} = 0,$$

welche Gleichung x nicht mehr enthält, also die gesuchte sein muß.

Sind einige der Koeffizienten der Gleichungen (1) und (2) mit aus einer oder aus zwei unbekannten Größen y und z zusammengesetzt, so werden diese noch in der Endgleichung enthalten sein.

Die Bildung der Koeffizienten A_2, B_2 ... a_2, b_2 ... A_3, B_3 ... a_3, b_3 ... ist, zufolge (a) und (b), sehr einfach; sie ist, symbolisch dargestellt, folgende

$$A_1 = aB - Ab;\ B_1 = aC - Ac;\ \ldots\ P_1 = aQ - Aq,$$
$$a_1 = qA - Qa;\ b_1 = qB - Qb;\ \ldots\ p_1 = qP - Qp,$$
$$A_2 = a_1B_1 - A_1b_1;\ B_2 = a_1C_1 - A_1c_1 \ldots O_2 = a_1P_1 - A_1p_1,$$
$$a_2 = p_1A_1 - P_1a_1;\ b_2 = p_1B_1 - P_1b_1 \ldots o_2 = p_1O_1 - P_1o_1,$$
$$A_3 = a_2B_2 - A_2b_2;\ B_3 = a_2C_2 - A_2c_2 \ldots N_2 = a_2O_2 - A_2o_2,$$
$$a^3 = o_2A_2 - O_2a_2;\ b_3 = o_2B_2 - O_2b_2 \ldots n_3 = o_2N_2 - O_2n_2$$

u. s. f.

Das Vorstehende gibt zu erkennen, daß die Elimination einer Größe x aus zwei Gleichungen (1) und (2) nur in der Entwickelung der Größen a_{n-1}, A_{n-1}, B_{n-1}, b_{n-1} besteht.

Zur Anwendung der eben behandelten Eliminationsmethode soll hier die Elimination der Größe x aus den Gleichungen

(5) $x^3 - 5x^2y + 3y^3 - 15 = 0$

(6) $2x^2 + 5y^2 - 22 = 0$

folgen.

Die Gleichung (5) mit (1), die (6) mit (2) verglichen, gibt

$$A = 1, B = -5y; C = 0; D = 3y^3 - 15$$
$$a = 0, b = 2; c = 0; d = 5y^2 - 22;$$ hieraus folgt

$$A_1 = aB - Ab = -2$$
$$B_1 = aC - Ac = 0$$
$$C_1 = aD - Ad = -(5y^2 - 22)$$
$$a_1 = dA - Da = 5y^2 - 22$$
$$b_1 = dB - Db = -5y(5y^2-22) - 2(3y^3-15)$$
$$= -(31y^3 - 110y - 30)$$
$$c_1 = dC - Dc = 0.$$
$$A_2 = a_1B_1 - A_1b_1 = -2(3y^3 - 110y - 30)$$
$$B_2 = a_1C_1 - A_1c_1 = -(5y^2 - 22)^2$$
$$a^2 = c_1A_1 - C_1a_1 = (5y^2 - 22)^2$$
$$b_2 = c_1B_1 - C_1b_1 = -(5y^2-22)(31y^3 - 110y - 30).$$

In den Gleichungen (5) und (6) ist x^3 die höchste Potenz der zu eliminirenden Größe, demnach $n = 3$ und sonach I.

$$a_2B_2 - A_2b_2 = 0.$$

Hierein die obigen Werthe gesetzt, gibt

(a) $-(5y^2-22)^4 - 2(5y^2-22)(31y^3-110y-30)^2 = 0$

oder

$$(5y^2 - 22)^3 + 2(31y^3 - 110y - 30)^2 = 0,$$

(b) $2047y^6 - 15290y^4 - 3720y^3 + 31460y^2 + 13200y - 8848 = 0.$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $y = 2$.

Diesen Werth in die Gleichungen (5) und (6) genommen, gibt

(7) $x^3 - 10x^2 + 9 = 0,$

(8) $x^2 - 1 = 0.$

Der Gleichung (7) entsprechen die Wurzeln

$1; 9 + \sqrt{117}; 9 - \sqrt{117};$ der Gleichung (8) die Wurzeln

$1, -1.$

Beide Gleichungen haben die Wurzeln 1 gemein, woraus folgt, daß für $y = 2$ in den Gleichungen (5) und (6) $x = 1$ ist.

Auf ähnliche Weise mit den übrigen fünf Wurzeln der Gleichung (b) verfahren, gibt die noch fehlenden, den Gleichungen (5) und (6) gemeinschaftlich entsprechenden Wurzeln.

Eine andere Eliminationsmethode, als die obige, lehrt Euler in den Abhandlungen der Berliner Akademie für das Jahr 1748 und beweis't dadurch, daß wenn die eine von zwei Gleichungen vom nten, die andere vom pten Grade ist, durch Elimination einer Größe x aus beiden Gleichungen die Endgleichung vom pnten Grade wird. Dasselbe beweis't Bezout in seiner Théorie générale des équations algébriques. Paris 1779.

Die oben gezeigte Eliminationsmethode gibt immer eine Endgleichung, die von einem höhern als vom pnten Grade ist, vorausgesetzt, die eine Gleichung war vom nten und die andere vom pten Grade. Diese Erhöhung geschieht nur durch einen Faktor, der sich in die Endgleichung einschleicht, und oft schwer zu entdecken ist. In der Gleichung (a) ist derselbe ($5y^2 - 22$). Nach der obigen Eliminationsmethode wird dieser Faktor immer stehen bleiben, wenn die Koeffizienten A_1, a_1 . . . A_2, a_2 . . . in Faktoren gelassen werden.

Angesetzte Aufgaben zur Reduktion der Gleichungen höherer Grade.

1) $x^3 = 8x - 32$.

2) $x^3 - 33x - 112 = 0$.

3) $x^3 + 3x + 14 = 0$.

4) $4x^3 + 37x + 219 = 0$.

5) $27x^3 - 29\frac{1}{4}x + 25 = 0$.

6) $x^3 + 4x + 7 = 0$.

7) $3x^3 - 5x + 8 = 0$.

8) $x^3 - 27x + 54 = 0$.

9) $27x^3 - 36x - 16 = 0$.

10) $x^3 - 9x^2 + 4x - 36 = 0$.

11) $x^3 + 3x^2 - 72x + 176 = 0$.

12) $x^3 - 91x + 330 = 0.$

13) $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0.$

14) $x^3 - 8x^2 - 13x + 140 = 0.$

15) $12x^3 - 17x^2 - 7\frac{1}{2}x + 9 = 0.$

16) $x^3 + 8x^2 - 15 = 0.$

17) $6x^3 - 17x^2 - 52 = 0.$

18) $x^4 - 55x^2 + 210x - 216 = 0.$

19) $x^4 - 45x^2 + 20x + 96 = 0.$

20) $x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 16x - 12 = 0.$

21) $x^4 - 5x^3 + 17 = 0.$

22) $x^4 + 20x - 18 = 0.$

23) $6x^4 - 18x - 7 = 0.$

24) $x^5 - 2x^3 - 2x + 36 = 0.$

25) $x^6 - 5x^5 - 2x^3 + 18x - 30 = 0.$

XIV.

Von den unbestimmten Aufgaben.

1) Aus einer Gleichung, die zwei unbekannte Größen enthält, ist der Werth der einen unbekannten Größe nur durch einen angenommenen Werth der andern auszudrücken.

Aufgaben, die auf solche Gleichungen führen, heißen einfach unbestimmte Aufgaben; eben so werden die Gleichungen selbst einfach unbestimmte genannt. Die allgemeinste Form der einer einfach unbestimmten Aufgabe entsprechenden Gleichung ist

(1) $ax + by = c$, und daraus folgt

(2) $x = \frac{c - by}{a}$ oder

$$y = \frac{c - ax}{b}.$$

Zu den einfach unbestimmten Aufgaben vom ersten Grade gehören überhaupt alle die, durch deren Bedingung für n unbekannte Größen nur (n — 1) unabhängige Gleichungen vom ersten Grade sich ableiten lassen: denn die durch Elimination sich ergebende Endgleichung hat zwei unbekannte Größen und ist von der Form

$$ax + by = c.$$

Sind die dieser Gleichung, nach der Bedingung der Aufgabe, für x und y entsprechenden Werthe ermittelt, so sind auch die Werthe der (n — 2) andern unbekannten Größen bedingt und durch die bei der Elimination erhaltenen Gleichungen zu bestimmen.

Es ist klar, daß in (2) x sehr viele Werthe erhält, wenn es die Aufgabe gestattet, jeden beliebigen Werth für y anzunehmen; und unter diesen Umständen hat die Auflösung einer Aufgabe, die durch eine Gleichung von der Form (1) ausgedrückt ist, durchaus keine eigenthümlichen Schwierigkeiten. Umständlicher wird aber die Auflösung werden, wenn die Aufgabe die Bedingung stellt, daß x und y ganze und positive Zahlen sein sollen. Durch diese Bedingung werden die Werthe für x und y einer gegebenen unbestimmten Aufgabe, der eine Gleichung von der Form (1) zukommt, so sehr vermindert, daß oft nur einige Werthe für x und y sich ergeben.

Die Bestimmung der Werthe für x und y aus einer Gleichung (1) unter der Bedingung, daß beide positive ganze Zahlen werden sollen, soll an den nachfolgenden Aufgaben gezeigt werden.

Aufgabe 1.) Die Zahl 63 soll dergestalt in zwei ganze und positive Addenden zerlegt werden, daß der erste durch 2 und der zweite durch 5 ohne Rest theilbar ist.

Auflösung. Der erste Addend gebe durch 2 dividirt den Quotienten x, und der zweite durch 5 dividirt den Quotienten y: so ist der erste Addend 2x und der zweite 5y, und $2x + 5y = 63$, wo, zufolge der Aufgabe, x und y ganze Zahlen sein müssen.

Aus dieser Gleichung folgt

$$(1)\ x = \frac{63 - 5y}{2} = \frac{63 - 6y + y}{2} = 31 - 3y + \frac{1 + y}{2}.$$

Da x und y ganze Zahlen sein sollen, muß auch $\frac{1+y}{2}$ eine ganze Zahl oder $1 + y$ durch 2 ohne Rest theilbar sein. Es sei deshalb

$z = \frac{1 + y}{2}$, wo z eine ganze Zahl bedeutet. Aus dieser Annahme folgt

(2) $y = 2z - 1$, und wenn dieser Werth in (1) gesetzt wird,

(3) $x = 31 - 3(2z - 1) + z = 34 - 5z.$

Nach (2) und (3) ist für die Zahl 63
der erste Addend $2x = 68 - 10z$ (4)
" zweite " $5y = 10z - 5$ (5),
wo z irgend eine ganze Zahl darstellt.

In (4) und (5) 1, 2, 3, 4 . . . statt z gesetzt, gibt

für $z =$	1	2	3	4	5	6
" $2x =$	58	48	38	28	18	8
" $5y =$	5	15	25	35	45	55
	63	63	63	63	63	63

Die Zahl 63 läßt sich hiernach sechsmal in zwei ganze und positive Addenden zerlegen, von denen der eine durch 2 und der andere durch 5 ohne Rest zu theilen ist.

Aufgabe 2) Die Summe zweier positiver ganzer Zahlen soll 28 sein, und die eine durch 5 dividirt den Rest 2, und die andere durch 8 dividirt den Rest 3 lassen. Welche Zahlen haben diese Eigenschaft?

Auflösung. Die erste dieser Zahlen ist durch $5x + 2$ und die zweite durch $8y + 3$ dargestellt, wo x und y ganze Zahlen bedeuten. Ferner ist

$$5x + 2 + 8y + 3 = 28,$$

$$(1)\ x = \frac{23 - 8y}{5} = 4 - y + \frac{3 - 3y}{5}.$$

Der Bruch $\frac{3 - 3y}{5}$ muß eine ganze und negative Zahl darstellen, weil x und y ganze und positive Zahlen werden sollen.

Es kann hiernach gesetzt werden

$$-z = \frac{3 - 3y}{5} \text{ d. g.}$$

$$y = \frac{3 + 5z}{3} = \frac{3 + 6z - z}{3} = 1 + 2z - \tfrac{1}{3}z.$$

$\frac{1}{3}z$ muß wieder eine ganze Zahl sein, weil sonst y keine ganze Zahl wird: es sei deshalb

$\frac{1}{3}z = w$; $3w = z$; folglich

$y = 1 + 6w - w = 1 + 5w$, und wenn dieser Werth in (1) substituirt wird,

$$x = 4 - (1 + 5w) + \frac{3 - 3(1 + 5w)}{5} = 3 - 8w.$$

Nun ist die eine der gesuchten Zahlen

$5x + 2 = 17 - 40w$, und die zweite

$8y + 3 = 11 + 40w$, d. g. für $w = 0$

$5x + 2 = 17$

$8y + 3 = 11.$

Andere Werthe für w sind nicht zu wählen, weil sonst die eine der zu suchenden Zahlen negativ wird: es gibt also nur zwei ganze und positive Zahlen, deren Summe 28 ist, und von denen die eine durch 5 dividirt den Rest 2, und die andere durch 8 dividirt den Rest 3 läßt.

Aufgabe 3.) Es soll eine ganze und positive Zahl gefunden werden, welche durch 3 dividirt den Rest 1, und durch 7 dividirt den Rest 6 läßt.

Auflösung. Die gesuchte Zahl sei N, so ist zu setzen

$N = 3x + 1$

$N = 7y + 6$ d. g.

$3x + 1 = 7y + 6$

$$(1)\ x = \frac{7y + 5}{3} = 1 + 2y + \frac{2 + y}{3}.$$

$\frac{2 + y}{3}$ muß eine ganze und positive Zahl sein; es sei deshalb

$$\frac{2 + y}{3} = w,$$

$y = 3w - 2$ d. g.

$N = 7y + 6 = 21w - 8$, und wenn hierein 1, 2, 3 . . . für w gesetzt wird,

$N = 13; 34; 55; 76$ u. s. f.

Es gibt hiernach unendlich viele positive ganze Zahlen, die der Forderung der Aufgabe genügen.

Aufgabe 4.) Es ist eine ganze und positive Zahl zu finden, welche durch 7 dividirt den Rest 5, durch 11 dividirt den Rest 9, und durch 13 dividirt den Rest 8 läßt.

Auflösung. Die gesuchte Zahl ist ausgedrückt durch

(1) $N = 7x + 5$

(2) $N = 11y + 9$

(3) $N = 13z + 8$ d. g.

$7x + 5 = 11y + 9$

$$x = \frac{11y + 4}{7} = 2y + \frac{4 - 3y}{7}.$$

Es muß $\frac{4-3y}{7}$ eine ganze und negative Zahl sein; demgemäß ist zu setzen

$\frac{4 - 3y}{7} = -w$ d. g.

(4) $y = \frac{4 + 7w}{3} = 1 + 2w + \frac{1 + w}{3}.$

Auch $\frac{1 + w}{3}$ ist eine ganze und zwar positive Zahl; es sei deshalb

$\frac{1 + w}{3} = t$; $w = 3t - 1$. Hiernach wird (4) zu

$y = 1 + 6t - 2 + t = 7t - 1$ und

(5) $N = 11y + 9 = 77t - 2$, welche Zahl den in (1) und (2) enthaltenen Bedingungen Genüge leistet.

Aus der Verbindung mit (3) und (5) wird

$13z + 8 = 77t - 2$

(6) $z = \frac{77t - 10}{13} = 6t - \frac{t + 10}{13},$

$\frac{t+10}{13}$ ist eine positive ganze Zahl, und wenn diese durch u ausgedrückt wird,

$u = \frac{t+10}{13}$; $t = 13u - 10$; demnach wird (6) zu

$z = 78u - 60 - u = 77u - 60$ und

(7) $N = 13z + 8 = 1001u - 772$, welche Zahl den in (1), (2) und (3) ausgesprochenen Bedingungen Genüge leistet.

In (7) 1, 2, 3 ... für u gesetzt, so sind Zahlen, welche den gestellten Bedingungen genügen

$N = 229; 1230; 2231$ u. s. f.

2) Sollen sich aus der Gleichung

$ax + by = c$,

welche die allgemeine Form aller einfach unbestimmten Gleichungen vom ersten Grade ist, ganze Zahlen für x und y entwickeln lassen, so müssen a und b Primzahlen unter sich sein; oder, wenn a und b einen gemeinschaftlichen Faktor haben, muß dieser auch in c mit enthalten sein. Denn haben a und b einen gemeinschaftlichen Faktor f, so muß dieser nothwendig auch in c enthalten sein, weil x und y ganze Zahlen vorstellen. Umgekehrt können x und y keine ganzen Zahlen sein, wenn für einen gemeinschaftlichen Faktor f der Koeffizienten a und b, c diesen Faktor nicht enthält. Aus der angenommenen Gleichung folgt auch $x = \frac{c - by}{a}$, und wenn $b = \beta f$ und $a = \alpha f$ gesetzt und angenommen wird, daß c, $\alpha f = a$ und $\beta f = b$ Primzahlen unter sich sind:

$$x = \frac{c - \beta f y}{\alpha f} = \frac{\frac{c}{f} - \beta y}{\alpha}.$$

Hier ist nun keine ganze positive oder negative Zahl für y möglich, welche, mit β multiplizirt und das Produkt mit $\frac{c}{f}$ vereinigt, eine ganze Zahl hervorbrächte: d. h., es werden sich aus der Gleichung

$ax + by = c$

x und y nicht in ganzen Zahlen bestimmen lassen, wenn a und b einen gemeinschaftlichen Theiler haben, der in c nicht enthalten ist.

3) Durch Elimination der unbekannten Größe z aus den Gleichungen

$$(1)\ ax + by + cz = d$$

$$(2)\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \text{ wird}$$

$$(3)\ (a\gamma - \alpha c)x + (b\gamma - \beta c)y = d\gamma - \delta c,$$

welche Gleichung die in (1) unter Nr. 1) angegebene Form hat. Sollen sich folglich aus der Gleichung (3) Werthe für x und y in ganzen Zahlen bestimmen lassen, so müssen zufolge Nr. 2) $a\gamma - \alpha c$ und $b\gamma - \beta c$ Primzahlen unter sich sein, oder sie können keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, der nicht zugleich auch in $d\gamma - \delta c$ enthalten ist.

Für die Gleichung (1) sei

$$ax = X;\ by = Y;\ cz = Z, \text{ oder}$$

$$x = \frac{X}{\alpha};\ y = \frac{Y}{b};\ z = \frac{Z}{c}.$$

Diese für x, y und z angenommenen Werthe in (1) und (2) gesetzt und die letztere Gleichung mit abc multiplizirt, gibt die Gleichungen

$$(4)\ X + Y + Z = d$$

$$(5)\ \alpha bcX + a\beta cY + ab\gamma Z = abc\delta.$$

In der Gleichung (5) mag αbc der größte und $ab\gamma$ der kleinste Koeffizient sein. Durch Multiplikation der Gleichung (4) mit dem größten Koeffizienten αbc der Gleichung (5) wird

$\alpha bcX + \alpha bcY + \alpha bcZ = \alpha bcd$, und es muß hier, in Beziehung auf (5), da $\alpha bc > a\beta c$; $\alpha bc > ab\gamma$ ist, auch

$$\alpha bcd > abc\delta \text{ oder}$$

$$(6)\ \alpha d > a\delta \text{ sein.}$$

Nach der eben genannten Annahme ist in der Gleichung (5) $ab\gamma$ der kleinste Koeffizient. Mit diesem die Gleichung (4) multiplizirt, gibt ganz gewiß

$$ab\gamma d < abc\delta$$

$$(7)\ \gamma d < c\delta.$$

Die, hinsichtlich der Gleichungen (1) und (2), in (6) und (7) enthaltenen Bedingungen werden immer gelten, wenn die Gleichungen (1) und (2) ganze und positive Werthe für die Größen x und y gestatten; und finden diese Bedingungen nicht statt, so wird auch nicht jede der unbekannten Größen x, y und z in ganzen Zahlen bestimmt werden können.

Ob aber, für ganze und positive Werthe der Größen x und y, auch z positive Werthe in ganzen Zahlen erhält, ist noch nicht bestimmt; doch können die Werthe für z höchstens durch c getheilt vorkommen.

Um das Letztere noch näher zu erläutern, wollen wir untersuchen, ob die Gleichungen

$$(a)\ 2x + y + 3z = 27$$
$$(b)\ 3x + 7y + 8z = 64$$

ganze und positive Zahlen für x, y, z gestatten.

Die angenommenen Gleichungen sind identisch mit denen in (1) und (2), und geben für die Koeffizienten der Gleichung (5)

$$\alpha bc = 3.1. + 3 = +9$$
$$a\beta c = 2. + 7. + 3 = 42$$
$$ab\gamma = 2 \cdot 1 \cdot 8 = 16$$

Hier ist $a\beta c$ der größte und αbc der kleinste Koeffizient: es muß deshalb, in Beziehung auf die allgemeine Bedeutung von (6) und (7), sein

$$a\beta c . 27 > \alpha bc . 64 \text{ d. g.}$$
$$42 \cdot 27 > 2 \cdot 1 . 3 . 64 \text{ oder}$$
$$1134 > 384, \text{ wie es gefordert wurde; ferner}$$
$$\underline{\alpha bc . 27 < 64 . abc}$$
$$\underline{+ 9 \cdot 27 < 64 . 2 \cdot 1 \cdot + 3}$$
$$243 < 384.$$

Die gegebenen Gleichungen gestatten demnach ganze und positive Werthe für x und y.

Aus den obigen Gleichungen z eliminirt, gibt

$$7x - 13y = 24,$$
$$x = \frac{24 + 13y}{7} = 3 + 2y + \frac{3 - y}{7};$$

$\frac{3-y}{7} = -$ w gesetzt, so wird

$y = 3 + 7w$

$x = 9 + 13w$, und wenn diese Werthe in (a) genommen werden

$z = 2 - 11w$.

Die Zahl w kann hier keinen andern Werth als 0 erhalten, da keine der zu bestimmenden Zahlen negativ sein soll, und in sofern finden für die Gleichungen (a) und (b) in ganzen und positiven Zahlen keine andern Werthe, als

$x = 9$, $y = 3$, $z = 2$ statt.

Für die Gleichungen

(c) $2x + y + 3z = 60$

(d) $3x + 7y + 8z = 235$ ist, in Beziehung auf die Gleichung (5)

$\alpha bc = 9$

$\beta ac = 42$

$\gamma ab = 16$; nach der allgemeinen Bedeutung von (6) und (7) soll hier

$$\left.\begin{array}{l} \beta ac \,.\, 60 > abc \,.\, 235 \\ \alpha bc \,.\, 60 < abc \,.\, 235 \end{array}\right\} \text{d. g.}$$

$$\left.\begin{array}{r} 42 \,.\, 60 > 6 \,.\, 235 \\ 9 \,.\, 60 < 6 \,.\, 235 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2520 > 1410 \\ 540 < 1410 \end{array}\right\}$$

Hiernach entsprechen den unbekannten Größen x und y der Gleichungen (c) und (d) positive ganze Zahlen.

Durch Elimination der Größe z aus den Gleichungen (c) und (d) wird erhalten

$7x - 13y = - 225$

$x = \frac{-225 + 13y}{7} = -32 + 2y - \frac{1+y}{7}$;

$\frac{1+y}{7} = w$ gesetzt, gibt

$y = 7w - 1$

$z = 13w - 34$, und wenn die Werthe für y und x in (c) gesetzt werden,

$z = - 11w + 43$.

Wenn keine der zu bestimmenden Zahlen negativ und zu 0 werden soll, kann w nur den Werth 3 annehmen, und so erhält man

$$y = 20$$
$$x = 5$$
$$z = 10.$$

4) Eine Gleichung wird eine nfach unbestimmte vom ersten Grade genannt, wenn sie vom ersten Grade ist und (n + 1) unbekannte Größen enthält. Die allgemeine Form einer doppelt unbestimmten Gleichung vom ersten Grade ist

$$(1)\ ax + by + cz = d.$$

Die doppelt unbestimmte Gleichung (1) wird nothwendig soviel einfach unbestimmte zulassen, soviel verschiedene ganze Zahlen die Aufgabe für die Größe z zu setzen gestattet.

In dem Falle, daß a und b einen gemeinschaftlichen Faktor f besitzen, muß, damit x und y in ganzen Zahlen zu bestimmen sind, für z eine solche Zahl genommen werden, daß d und cz ebenfalls durch f theilbar werden.

Nachdem in der Gleichung (1) für y und z zwei Zahlenwerthe gesetzt sind, die den Bedingungen der Aufgabe genügen, erhält man für die dritte unbekannte Größe eine bestimmte Gleichung, aus der sich der Werth derselben ermitteln läßt.

Dieses Verfahren ist nicht mehr ausreichend, oder doch ziemlich unbequem, wenn die Aufgabe vorschreibt, daß die drei unbekannten Größen nur ganze und positive Zahlen sein können. Bei diesen Bedingungen setzt man nur für die eine unbekannte Größe z einen der Aufgabe entsprechenden Zahlenwerth, und findet, aus der hierdurch entstehenden einfach unbestimmten Gleichung, die den zwei andern unbekannten Größen entsprechenden Werthe.

In einer dreifach unbestimmten Gleichung, deren allgemeine Form

$$ax + by + cz + dw = e$$

ist, sind jedenfalls für zwei der unbekannten Größen der Aufgabe entsprechende Werthe anzunehmen, und aus der hierdurch entstehenden einfach unbestimmten die zwei andern abzuleiten u. s. f.

Zur nähern Erläuterung des Vorstehenden kann folgende Aufgabe mit ihrer Auflösung dienen.

Aufgabe 1.) Es sind drei ganze und positive Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, daß die Summe aus dem Vierfachen der ersten und dem Sechsfachen der zweiten weniger dem Elffachen der dritten 308 gibt.

Auflösung. Die zu bestimmenden Zahlen durch x, y und z ausgedrückt, gibt die Gleichung

(1) $4x + 6y - 11z = 308$.

In (1) $z = 1$ gesetzt, gibt

$$4x + 6y = 308 + 11 = 319,$$

was nicht statt haben kann, wenn x und y ganze Zahlen sein sollen. Setzt man aber irgend eine gerade Zahl für z, so wird die Gleichung immer durch 2 theilbar werden, wie es sein muß.

In (1) $z = 2$ genommen, gibt

$$4x + 6y = 308 + 22 = 330$$

$$2x + 3y = 165$$

$$x = \frac{165 - 3y}{2} = 82 - 2y - \frac{1 + y}{2};$$

$$\frac{1 + y}{2} = w;$$

(2) $y = 2w - 1$

(3) $x = 84 - 3w$.

In (2) und (3) 1, 2, 3, 4 . . . für w gesetzt, und man erhält

$y = 1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11$

$x = 81;\ 78;\ 75;\ 72;\ 69;\ 66$ u. s. f. für $z = 2$.

In (1) $z = 4$ gesetzt, gibt

$$4x + 6y = 308 + 44$$

$$x = \frac{176 - 3y}{2} = 88 - 2y + \tfrac{1}{2}y.$$

$y = 2w$ gesetzt, so wird $x = 88 - 3w$, und wenn man hier w zu 1, 2, 3 . . . annimmt,

$y = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$

$x = 85; 82;\ 79;\ 76;\ 73$ u. s. f. für $z = 4$

u. s. f.

Das Vorgetragene, über die ein- und mehrfach unbestimmten Gleichungen vom ersten Grade, wird hinreichend zur Auflösung aller Aufgaben sein, denen eine solche Gleichung zukommt, und wir gehen nun zu den einfach unbestimten Aufgaben des zweiten Grades.

5) Die allgemeine Form der einfach unbestimmten Gleichungen vom zweiten Grade ist

(1) $ax^2 + bxy + cy^2 + dy + ex = f$, und hieraus leiten sich

$$ax^2 + bxy + cy^2 = f$$
$$ax^2 + dy + ex = f$$
$$bxy + dy + ex = f \text{ u. s. f. ab.}$$

Aus der Gleichung (1) folgt

$$x = \frac{(by + e) \pm \sqrt{[(by + e)^2 + 4a(f - cy^2 - dy)]}}{2a},$$

welche Formel dann zur Bestimmung des Werthes für x bequem gebraucht werden kann, wenn die Aufgabe jeden Werth für x und y gestattet. Auch wird sie noch brauchbar sein, wenn für x und y nur positive ganze und gebrochne Zahlen gestattet sind.

Aber Schwierigkeit findet die Anwendung dieser Formel, wenn die Größen x und y einer Gleichung (1) in ganzen und positiven Zahlen gefordert werden. Da die Größen a, b, c, d, e, f ganze und positive Zahlen sind: so muß der Werth für y so gewählt werden, daß 1) die Wurzelgröße rational wird, und 2) — (by + e) zu dieser Wurzel genommen, eine durch 2a theilbare Zahl gibt.

Die Verwandlung eines unter einer irrationalen Form erscheinenden Ausdruckes in einen rationalen wird unter manchen Umständen möglich; besondere Anleitung findet man hierzu in „Leonhard Eulers vollständiger Anleitung zur niederen und höhern Analysis," Th. 2. Kap. IV., V., VI. u. f.

Eine bequemere Auflösung lassen solche einfach unbestimmte Gleichungen vom zweiten Grade für ganze und positive Zahlen zu, in denen die eine unbekannte Größe nur in der ersten Potenz vorkommt. Einige Gleichungen von dieser Beschaffenheit sollen mit ihren Auflösungen hier folgen.

Die Gleichung

$$ax + bxy = c$$

gibt $x = \frac{c}{a + by}$.

Für x kann sich nur dann eine ganze Zahl ergeben, wenn c durch a + by ohne Rest theilbar ist: der Nenner a + by muß demgemäß ein Faktor des Zählers sein. Den Faktor des Zählers, der dem Nenner gleich ist, z gesetzt, gibt

$$z = a + by$$

$$y = \frac{z - a}{b}.$$

Es soll aber auch y eine ganze positive Zahl sein: für ganze und positive Werthe für x und y muß folglich der Faktor z von c, um a vermindert, ein Produkt sein, dem der Faktor b zukommt. Soviel Faktoren z der Zähler c von dieser Beschaffenheit hat, soviel verschiedene Werthe werden sich für x und y ergeben. Zur näheren Auseinandersetzung nehmen wir die Gleichung

$$3x + 5xy = 288.$$

Hieraus ergibt sich

$$(1)\ x = \frac{288}{3 + 5y}.$$

Die einfachen Faktoren der Zahl 288 sind 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, woraus folgt, daß 288 theilbar ist durch die Zahlen
3, 9, 2, 6, 18, 4, 12, 36, 8, 24, 72, 16, 48, 144, 32, 96, 288.

Von diesen Faktoren können nur solche gebraucht werden, wenn x und y in ganzen positiven Zahlen erscheinen sollen, die, um 3 vermindert, durch 5 theilbar werden. Faktoren dieser Art sind 18, 8, 48, 288.

Diese Faktoren oder der Nenner 3 + 5y soll durch z ausgedrückt sein, so ist

$$5y + 3 = z,$$

$$y = \frac{z - 3}{5}.$$

Hierein und in (1) die oben stehenden Faktoren 8, 18, 48, 288 für z = 3 + 5y gesetzt, gibt

$$x = 36,\ 16,\ 6,\ 1$$
$$y = 1,\ 3,\ 9,\ 95.$$

Aus der Gleichung

$$ax + bxy + cy = d \text{ folgt}$$

$$x = \frac{d - cy}{a + by}.$$

Damit y aus dem Zähler entfernt werden könne, multiplizire man die Gleichung durch b,

$$bx = \frac{bd - bcy}{a + by} = -\frac{bcy + bd}{by + a},$$ und dividire mit dem Nenner in den Zähler, so wird

$$bx = -c + \frac{ac + bd}{by + a},$$

$$bx + c = \frac{ac + bd}{by + a}.$$

Der Zähler ac + bd muß den Nenner by + a als Faktor enthalten. Der Faktor des Zählers, der dem Nenner gleich ist, sei z, so wird

$$z = by + a$$

$$y = \frac{z - a}{b}$$ d. h., wenn y eine ganze Zahl sein soll, muß der Zähler einen Faktor besitzen, der um a vermindert, eine durch b theilbare Zahl gibt.

Der Zähler des obigen Bruches sei ferner fz, wo, nach oben, z dem Nenner gleich ist, so wird

$$bx + c = f$$

$$x = \frac{f - c}{b},$$ d. h., damit für einen ganzen Zahlenwerth der Größe y auch x eine ganze Zahl werde, muß der durch Division mit dem Nenner in den Zähler fz entstehende Quotient f, um c vermindert, eine durch b theilbare Zahl geben.

Zur Anwendung wollen wir die den Größen x und y der Gleichung

$$2x + 3xy - 4y = 32$$

entsprechenden ganzen positiven Zahlen suchen.

Die Gleichung auf x reduzirt und mit 3 multiplizirt, gibt

$$3x = \frac{12y + 96}{3y + 2} = 4 + \frac{88}{3y + 2}.$$

Die einfachen Faktoren von 88 sind 2, 2, 2, 11, woraus folgt, daß 88 ohne Rest theilbar ist durch

2, 4, 8, 11, 22, 44, 88.

Von diesen Zahlen sind nur 8, 11, 44, wenn sie um 2 vermindert werden, durch 3 ohne Rest theilbar: es ist deshalb nur für y anzunehmen

$$\frac{8-2}{3} = 2; \quad \frac{11-2}{3} = 3; \quad \frac{44-2}{3} = 14.$$

Durch Annahme dieser Werthe für y wird

$$3x = 4 + 11 = 15; \quad x = 5$$
$$3x = 4 + 8 = 12; \quad x = 4$$
$$3x = 4 + 2 = 6; \quad x = 2.$$

Der obigen Gleichung entsprechen daher nur die Zahlen

$y = 2,\ 3,\ 14.$
$x = 5,\ 4,\ 2.$

Zum Schluß wollen wir noch die ganzen und positiven Zahlen bestimmen, welche für x und y in die Gleichung

$$x^2 + 3xy - x + 3y = 47$$

gesetzt, ihr Genüge leisten.

Aus dieser Gleichung folgt

$$3y = \frac{47 - x^2 + x}{x + 1} = -x + 2 + \frac{45}{x+1}.$$

In der Zahl 45 sind die Zahlen 3, 9, 5, 15, 45 ohne Rest enthalten. Damit der Bruch $\frac{45}{x+1}$ eine ganze Zahl werde, ist deshalb für x anzunehmen 2, 8, 4, 14, 44. Durch Substitution dieser Werthe wird

$$3y = -2 + 2 + 15 = 15; \quad y = 5$$
$$3y = -8 + 2 + 5 = -1; \text{ u. s. f.}$$

In ganzen und positiven Zahlen wird folglich der Gleichung

$x^2 + 3xy - y + 3y = 47$ nur durch $x = 2$ und $y = 5$ Genüge geleistet.

Eine weitere Entwickelung der Theorie der unbestimmten Gleichungen findet man im ersten Bande des fünften Theiles von Klügels mathematischem Wörterbuche, unter dem Artikel „Unbestimmte Analytik".

Die unbestimmten Aufgaben nennt man wohl auch Diophantische Aufgaben von ihrem vermutheten Erfinder, dem griechischen Mathematiker Diophantus aus Alexandrien. Von Diophantus besitzen wir noch eine Sammlung, größtentheils unbestimmter, arithmetischer Aufgaben: „Diophantus von Alexandria arithmetische Aufgaben, aus dem Griechischen übersetzt von Otto Schulz, Berlin 1822."

Unbestimmte Aufgaben.

1) Die Zahl 130 soll in zwei Addenden zerlegt werden, von denen der eine durch 5 und der andere durch 7 ohne Rest theilbar ist. Welche Theile haben diese Eigenschaft?

2) Es sollen zwei ganze und positive Zahlen von solcher Beschaffenheit gefunden werden, daß das Dreifache der ersten mit dem Siebenfachen der zweiten die Summe 121 gibt. Welche Zahlen können dies sein?

3) Die Summe zweier ganzer positiver Zahlen beträgt 75, und dividirt man die eine durch 3, so bleibt der Rest 1, und theilt man die zweite durch 5, so bleibt der Rest 4. Welche Zahlen können dies sein?

4) Welche Zahl gibt, durch 2 dividirt, den Rest 1; durch 3 dividirt, den Rest 2; durch 5 dividirt, den Rest 4; durch 7 dividirt den Rest 6?

5) Ein Weinhändler schickte einem Handelshause 58 Eimer Landwein in 5- und 7-Eimerstücken. Wieviel 5- und wieviel 7-Eimerstücke kann er geschickt haben?

6) Jemand hat eine Schuld von 150 Thlrn. zu bezahlen. Da er keine andere Münzsorte als Speziesthaler à $1\frac{1}{3}$ Thlr. und Laubthaler à $1\frac{1}{2}$ Thlr. hat: so fragt es sich, mit wieviel Stück von jeder Münzsorte die obige Schuld bezahlt werden kann?

7) Jemand hat Arbeiter in zwei Abtheilungen. 1 Mann der ersten Abtheilung erhält täglich 8 gl., 1 Mann der zweiten Abtheilung täglich 10 gl., und so beträgt das tägliche Arbeitslohn für beide Abtheilungen 10 Thlr. Aus wieviel Mann besteht jede Abtheilung?

8) Ein Geldpacket hat die Aufschrift: 130 Thlr. in $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$ Thlrn. Das ganze Packet besteht aus vier Rollen, von denen, der Stärke zufolge, 2 die $\frac{1}{6}$ Thlr. und 2 die $\frac{1}{3}$ Thlr. enthalten: es können also im Packete nicht viel Viergroschenstücke mehr als Achtgroschenstücke sein. Wieviel Vier- und Achtgroschenstücke enthält wohl das Packet?

9) Ein mit Citronen und Pomsinen gefüllter Korb enthält mehr als 100 und weniger als 200 Stück. Die Citronen zu Schocken abgezählt, so bleiben 24 Stück, und die Pomsinen eben so abgezählt, so bleiben 36 Stück übrig. Der Werth der Citronen und Pomsinen beträgt 15 Thlr. 6 gl., wenn eine Citrone zu $1\frac{1}{2}$ gl. und eine Pomsine zu $2\frac{1}{2}$ gl. gerechnet wird. Wieviel Citronen und wieviel Pomsinen befinden sich im Korbe?

10) In einer aus Männern und Frauen bestehenden Gesellschaft, die anfänglich weniger als 60 Personen zählte, waren soviel Frauen, daß, nachdem der dritte Theil derselben und der fünfte Theil der Männer fortgegangen war, bei einem Tanze, an welchem alle Männer Antheil nahmen, noch 6 Frauen nicht tanzten. Aus wieviel Männern und Frauen bestand die Gesellschaft anfänglich?

11) Ein Silberarbeiter will aus sächsischen Speziesthalerstücken und aus preußischen Thalerstücken 13löthiges Silber mischen. Wieviel Stück Speziesthaler und preußische Thaler muß er mindestens zusammenschmelzen, um seinen Zweck zu erreichen, da aus der feinen Mark Silber in Sachsen 10 Speziesthaler und in Preußen 14 Thlr. geprägt werden, ferner 21 preußische Thaler 2 Mark und 25 Speziesthaler 3 Mark wiegen?

12) Ein Fabrikant verschickt 50 Stück Barchent für 671 Thlr. in drei verschiedenen Sorten. Von der ersten Sorte gilt

das Stück 8 Thlr., von der zweiten 12 Thlr. und von der dritten 17 Thlr. Aus wieviel Stück von jeder Sorte besteht die Sendung?

13) Ein auf einen Jahrmarkt ziehender Schuhmacher hatte 86 Paare an Stiefeln, Schuhen und Pantoffeln in seiner Kiste, deren Werth sich auf 124 Thaler belief, wenn das Paar Stiefeln zu 2 Thlr. 8 gl., das Paar Schuhe zu 1 Thlr. 6 gl. und das Paar Pantoffeln zu 14 gl. gerechnet wurde. Wieviel Paare Stiefeln, Schuhe und Pantoffeln enthielt die Kiste?

14) Ein Familienvater hinterläßt ein Vermögen, das weniger als 10000 Thlr. beträgt. Erhält jedes seiner rechten Kinder 2000 Thlr., so bleiben für die Wittwe und für die Stiefkinder 2700 Thlr. Bekommt aber jedes rechte Kind und jedes Stiefkind 1600 Thlr., so bleiben für die Wittwe 700 Thlr. Wieviel rechte und wieviel Stiefkinder sind da, und wieviel beträgt die Erbschaft?

15) Als man die Kommunalgarde in Dresden errichtete, wurde festgesetzt, daß eine Kompagnie nicht unter 150 und nicht über 200 Mann haben solle.

Bei der Abtheilung einer solchen Kompagnie zu gleichviel Mann, in vier Züge, kamen auf den letzten Zug 3 Mann weniger als auf jeden der drei vorhergehenden; und bei der Abtheilung in fünf Züge, erhielt der letzte Zug 3 Mann mehr als jeder der vier ersten. Wieviel Gardisten hatte wohl diese Kompagnie?

16) Ein Pachter fuhr Korn, Gerste und Hafer zu Markte und sagte zu seinem Bruder, daß er nicht über 43 Scheffel habe und 155 Thlr. daraus lösen würde, wenn er für den Scheffel Korn 4 Thlr. 16 gl., für den Scheffel Gerste 3 Thlr. 8 gl. und für den Scheffel Hafer 2 Thlr. 12 gl. erhalte. Wieviel Scheffel Korn, Gerste und Hafer hatte er wohl?

17) Zur Vertheilung unter Arme soll für 18 Thlr. Brod, das Stück zu 3 gl., angekauft werden. Der Bäcker, von dem man das Brod nehmen will, hat aber noch nicht ganz für

7 Thlr Dreigroschenbrode, und man sieht sich deshalb genöthigt, noch Vier- und Sechsgroschenbrode dazu zu nehmen. Wieviel Brode von jedem Preise können für 18 Thlr. genommen werden?

18) Eine Wasserleitung von 131 Fuß Länge soll durch vorräthige 5, 7 und 9 Fuß lange gußeiserne Röhren hergestellt werden. Wieviel Röhren sind von jeder Sorte zu nehmen?

19) Ein Kaufmann erhält eine Sendung Burgunderwein von 12 Eimern. Durch den Transport ist das Gefäß dergestalt beschädigt, daß er sich genöthigt sieht, den Wein auf andere Gefäße zu ziehen. Da er nur Gebinde vorräthig hat, die 2, 3 und 5 Eimer enthalten, so fragt es sich, wieviel Stück er von jeder Art nehmen muß, um den Wein abziehen zu können.

20) Eine Stadt erhält alljährlich aus einem nahe gelegenen landesherrlichen Forste 350 Klaftern $\frac{8}{4}$elliges Fichtenholz zu einem billigen Preise. Im letzten Jahre wurde aus diesem Forste nur wenig Fichtenholz und dies nur $\frac{5}{4}$ellig geschlagen: weshalb man der Stadt dieses und außerdem noch $\frac{5}{4}$elliges Buchenholz und $\frac{5}{4}$elliges Eichenholz mit der Bedingung anbietet, die Klafter $\frac{5}{4}$elliges Buchenholz gleich $\frac{9}{8}$ Klaftern, und die Klafter $\frac{5}{4}$elliges Eichenholz gleich $\frac{7}{8}$ Klaftern Fichtenholz von derselben Länge zu rechnen. Die Stadt nimmt diesen Vorschlag an und wünscht wo möglich von jeder Holzsorte, in ganzen Klaftern, gleichviel. Wieviel Klaftern $\frac{5}{4}$elliges Fichten-, Buchen- und Eichenholz wird die Stadt erhalten?

XV.

Von den Exponential-Gleichungen.

Eine Gleichung wird eine Exponentialgleichung genannt, wenn die aus ihr zu bestimmende unbekannte Größe als Exponent vorkommt. Exponentialgleichungen sind

$$a^x = b,$$
$$a^{x+m} = b^{x+n},$$
$$a^{mx} + b^{nx} + c^{px} = q.$$

Von beiden Theilen der Exponentialgleichung

$$a^x = b$$

den Logarithmus genommen, gibt

$$x \log. a = \log. b,$$
$$x = \frac{\log. b}{\log. a}.$$

Für die Exponentialgleichung

$$a^{x+m} = b^{x+n}$$

erhält man

$$(x + m) \log. a = (x + n) \log. b,$$
$$x \log. a - x \log. b = n \log. b - m \log. a,$$
$$x = \frac{n \log. b - m \log. a}{\log. a - \log. b}.$$

Durch Verwandlung der Exponentialgleichung

$$\frac{a^{x+n} c}{b^{mx}} = f^{px} d$$

in eine logarithmische wird

$$(x + n) \log. a + \log. c - mx \log. b = px \log. f + \log. d,$$
$$x = \frac{\log. d - \log. c - n \log. a}{\log. a - m \log. b - p \log. f}.$$

Für eine Exponentialgleichung von der Form

$$a^{mx} + b^{nx} + c^{px} + d^{qx} \ldots = f$$

werden, durch Verwandlung in eine logarithmische Gleichung, die Exponenten mx, px ... nicht als Faktoren der Größen $\log. a$, $\log. b$ ... erscheinen, weshalb eine solche Gleichung mittels Logarithmen nicht aufzulösen ist.

Mittels Logarithmen ist der Werth eines unbekannten Exponenten x überhaupt dann zu finden

1.) wenn derselbe nur in einem Gliede der Gleichung vorkommt, wie in $ab^x c^{2x} = f + g + h$, und

2.) wenn die Gleichung nur zwei Glieder hat und in denen der unbekannte Exponent vorkommt, wie in
$$ab^x c^{px+r} = f^{qx} g.$$

Der Werth einer unbekannten Größe x einer Gleichung von der Form

$$ab^{mx+\alpha} + cd^{nx+\beta} + ef^{px+\gamma} \ldots = m$$

ist durch Versuche noch am bequemsten zu ermitteln.

Für Exponentialgleichungen mögen hier noch Aufgaben mit ihren Auflösungen folgen.

Aufgabe 1.) Zu welcher Potenz muß die Zahl 2 erhoben werden, damit die entwickelte Potenz gleich 17 ist?

Auflösung. Es sei 17 die xte Potenz von 2, also

$$2^x = 17,$$

$$x = \frac{\log. 17}{\log. 2} = \frac{1,2304489}{0,3010300} = 4,0874, \text{ oder}$$

$$2^{4,0874} = 17.$$

Aufgabe 2.) Die wievielste Wurzel ist 7 von der Zahl 185?

Auflösung. Es sei 7 die xte Wurzel aus 185, oder

$$\sqrt[x]{185} = 7, \text{ d. g.}$$

$$7^x = 185$$

$$x = \frac{\log. 185}{\log. 7} = \frac{2,2671717}{0,8450980} = 2,68273.$$

Aufgabe 3.) Es soll der Werth für x aus der Gleichung

$$6^{5^{2x}} = 375 \text{ gefunden werden.}$$

Aflösung. Die Gleichung in eine logarithmische verwandelt, gibt

$$5^{2x} \log. 6 = \log. 375,$$

$$5^{2x} = \frac{\log. 375}{\log. 6} = 3,30788;$$

diese Gleichung nochmals in eine logarithmische verwandelt und auf x reduzirt, so wird

$$2x \log. 5 = \log. 3,30788,$$

$$x = \frac{\log. 3,30788}{2 \log. 5} = 0,3716.$$

Dritter Abschnitt.

Lehre von den Progressionen.

XVI.

Von den arithmetischen Progressionen.

1) Eine Zusammenstellung von Zahlen oder allgemeinen Größen, bei welcher jedes Glied aus dem oder aus einigen der nächstvorgehenden, nach einem bestimmten Gesetze, gefunden werden kann, heißt eine Reihe oder eine Progression.

Die Progressionen theilt man in arithmetische und geometrische. Eine Progression heißt eine arithmetische, wenn irgend ein Glied derselben aus dem nächst vorgehenden durch Addition einer bestimmten oder einer nach einem bestimmten Gesetze zu findenden Zahl, aber eine geometrische, wenn ein Glied aus dem vorgehenden durch Multiplikation einer eben solchen Zahl gebildet wird. So ist

1, 3, 5, 7, 9, 11 . . . eine arithmetische, und

$\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27, 81 . . . eine geometrische Progression.

Diese zwei Arten von Reihen werden gewöhnlich nur Progressionen, andere aber Reihen genannt.

2) Eine arithmetische Progression, für welche zwischen zwei Gliedern immer eine und dieselbe Differenz stattfindet, heißt eine arithmetische Reihe oder Progression der ersten Ordnung; eine solche Progression ist

2, 5, 8, 11, 14 . . . oder

$a, \; a+d, \; a+2d, \; a+3d \ldots$

Von der zweiten Ordnung heißt eine arithmetische Progression, wenn die Differenzen aus den auf einanderfolgenden Gliedern, eine arithmetische Progression der ersten Ordnung bilden, wie

$$\underbrace{}_{2}\;\underbrace{}_{3}\;\underbrace{}_{4}\;\underbrace{}_{5}\;\underbrace{}_{6}$$

$$2,\ 4,\ 7,\ 11,\ 16,\ 22\ldots;$$

von der dritten Ordnung, wenn die Reihe der Differenzen aus den auf einander folgenden Gliedern, eine Reihe der zweiten Ordnung; und von der nten Ordnung heißt eine arithmetische Progression, wenn die Reihe der Differenzen aus den auf einander folgenden Gliedern, eine arithmetische Progression der $(n-1)$ Ordnung ist.

3) Das erste Glied einer arithmetischen Progression der ersten Ordnung sei a, die beständige Differenz zwischen je zwei Gliedern d, so wird die Progression sein

$$(1)\ \overset{1}{a},\ \overset{2}{a+d},\ \overset{3}{a+2d},\ \overset{4}{a+3d},\ \overset{5}{a+4d},\ \text{u. s. f.}$$

In jedem Gliede dieser Progression hat d einen Faktor, der um 1 niedriger als der Stellenzeiger, Index, des Gliedes ist: demgemäß ist das nte Glied der Reihe (1)

$a+(n-1)d$, und wenn dessen Werth durch t ausgedrückt wird,

$$\text{I. } t = a + (n-1)\,d.$$

Diese Formel nennt man das allgemeine Glied einer arithmetischen Progression der ersten Ordnung, weil durch dasselbe, wenn das Anfangsglied a der Reihe und die Differenz d gegeben ist, jedes beliebige Glied der Progression gefunden werden kann.

Nach I. ist von einer arithmetischen Progression der ersten Ordnung

das $(n-1)$te Glied $= a+(n-2)d$,
„ $(n-2)$te „ $= a+(n-3)d$,
„ $(n-3)$te „ $= a+(n-4)d$ u. s. f.

Die Summe von n Gliedern der Progression (1) durch s bezeichnet, gibt

$$(2)\ \begin{cases} s = a + [a+d] + [a+2d] + [a+3d] \ldots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d] \text{ oder auch} \\ s = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + [a+(n-3)d] + [a+(n-4)d] \ldots + [a+d] + a. \end{cases}$$

Die über einander stehenden Glieder addirt, so wird

$$(3)\ 2s = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] \ldots [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d],$$

das gibt: die Summen der von beiden Enden gleichweit abstehenden Glieder einer arithmetischen Progression der ersten Ordnung sind einander gleich.

Jede der Reihen in (2) besteht aus n Gliedern, demgemäß hat auch die Reihe (3) n Glieder: weshalb aus (3) folgt

$$2s = n[2a + (n-1)d] \text{ oder}$$

$$\text{I. } s = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d].$$

Dieser Ausdruck wird die Summenformel oder das summatorische Glied einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung genannt.

Für die arithmetische Progression

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ... ist, in Beziehung auf (1), $a = 3$, $d = 2$, mithin der Werth ihres nten = 7ten Gliedes, nach I.

$t = a + (n-1)d = 3 + (7-1)2 = 15$, die Summe ihrer $n = 7$ ersten Glieder nach II.

$$s = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{7}{2}[6 + 6 \cdot 2] = \frac{7 \cdot 18}{2} = 63.$$

4) Aus den unter Nr. 3) gefundenen Formeln für arithmetische Reihen der ersten Ordnung

$$\text{I. } t = a + (n-1)d$$

$$\text{II. } s = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

lassen sich, wie nachstehend, noch drei andere herleiten.

In Rücksicht auf I. ist

$$2a + (n-1)d = a + (n-1)d + a = t + a,$$

folglich

$$\text{III. } s = \frac{n}{2}(a + t).$$

Den Werth für a aus I. in II. gesetzt, gibt

$$\text{IV. } s = \frac{n}{2}[2t - (n-1)d],$$

und wenn der Werth für n aus I. in II. genommen wird,

$$\text{V. } s = \frac{(t-a+d)(t+a)}{2d}.$$

Mittels der vorstehenden Formel ist jede Aufgabe, die sich auf eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bezieht, zu lösen.

5) Das erste Glied einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung gleich 1 und ihre Differenz gleich d genommen, so ist ihr allgemeines Glied

(1) $t = 1 + (n-1)d$, ihre Summenformel

(2) $s = \frac{n}{2}[2 + (n-1)d]$ und die Reihe selbst

(3) $1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d,\ 1+4d \ldots$

Durch Summirung des ersten, des ersten und zweiten, des ersten, zweiten und dritten Gliedes u. s. f. ergibt sich die arithmetische Reihe der zweiten Ordnung.

(4) $1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d,\ 5+10d \ldots$

Aus der Entstehungsweise dieser Reihe folgt, daß ihr allgemeines Glied die Summenformel der Reihe (3) sein muß.

Ebenso, wie die Glieder der Reihe (3) addirt wurden, die Glieder der Reihe (4) zusammengezogen, gibt die arithmetische Reihe der dritten Ordnung

(5) $1,\ 3+d,\ 6+4d,\ 10+10d,\ 15+20d \ldots$

welcher die Summenformel der Reihe (4) als allgemeines Glied entsprechen muß.

Wie vorstehend, die Glieder der Reihe (5) addirt und auf gleiche Weise fortgefahren, gibt die nachstehende Tafel.

A

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I.	1,	1 + d,	1 + 2d,	1 + 3d,	1 + 4d,	1 + 5d,	1 + 6d,	1 + 7d,	1 + 8d . . .
II.	0,	1,	2 + d,	3 + 3d,	4 + 6d,	5 + 10d,	6 + 15d,	3 + 21d,	8 + 28d . . .
III.	0,	0,	1,	3 + d,	6 + 6d,	10+10d,	15+20d,	21+35d,	28+56d . . .
IV.	0,	0,	0,	1,	4 + d,	10+5d,	20+15d,	35+35d,	56+70d . . .
V.	0,	0,	0,	0,	1,	5 + d,	15+6d,	35+21d,	70+56d . . .
VI.	0,	0,	0,	0,	0,	1,	6 + d,	21+7d,	56+28d . . .
VII.	0,	0,	0,	0,	0,	0,	1,	7 + d,	28+8d . . .
VIII.	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	1,	8 + d . . .

Die mit 8 überschriebene Spalte läßt sich auch darstellen durch

$$7 = \frac{8-1}{1},$$

$$21 = \frac{(8-1)(8-2)}{1 \cdot 2},$$

$$35 = \frac{(8-1)(8-2)(8-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$35 = \frac{(8-1)(8-2)\ldots(8-4)}{1 \cdot 2 \ldots 4},$$

$$21 = \frac{(8-1)(8-2)\ldots(8-6)}{1 \cdot 2 \ldots 5},$$

$$7 = \frac{(8-1)(8-2)\ldots(8-6)}{1 \cdot 2 \ldots 6},$$

$$1 = \frac{(8-1)(8-2)\ldots(8-7)}{1 \cdot 2 \ldots 7},$$

$$21d = \frac{(8-1)(8-2)d}{1 \cdot 2},$$

$$35d = \frac{(8-1)(8-2)(8-3)d}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$35d = \frac{(8-1)(8-2)\ldots(8-4)d}{1 \cdot 2 \ldots 4},$$

$$21d = \frac{(8-1)(8-2)\ldots(8-5)d}{1 \cdot 2 \ldots 5},$$

$$7d = \frac{(8-1)(8-2)\ldots(8-6)d}{1 \cdot 2 \ldots 6},$$

$$d + \frac{(8-1)(8-2)\ldots(8-7)d}{1 \cdot 2 \ldots 7},$$

und ähnlich jede andere Spalte.

Ist dieses Gesetz der Darstellung allgemein, so ist die mit n überschriebene Spalte

B

I. $1 + \frac{(n-1)d}{1}$,

II. $\frac{(n-1)}{1} + \frac{(n-1)(n-2)d}{1 \cdot 2}$,

III. $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)d}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,

IV. $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-4)d}{1 \cdot 2 \ldots 4}$,

V. $\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-4)}{1 \cdot 2 \ldots 4} + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-5)d}{1 \cdot 2 \ldots 5}$

u. s. f.

und die mit (n + 1) überschriebene Spalte

$1 + \frac{nd}{1}$,

$\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)d}{1 \cdot 2}$,

$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)d}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,

$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)\ldots(n-3)d}{1 \cdot 2 \ldots 4}$,

$\frac{n(n-1)\ldots(n-3)}{1 \cdot 2 \ldots 4} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4)d}{1 \cdot 2 \ldots 5}$,

u. s. f.

Betrachten wir die mit 7 und 8 überschriebenen Spalten, oder jedes andere Paar, so finden wir, daß die mit 8 überschriebene Spalte aus der mit 7 überschriebenen hergeleitet werden kann; denn es ist

$$\left.\begin{array}{r} 1 + 6d \\ 6 + 15d \end{array}\right\} = 7 + 21d$$

$$\left.\begin{array}{r} 6 + 15d \\ 15 + 20d \end{array}\right\} = 21 + 35d \quad \text{u. s. f.}$$

Demgemäß muß auch aus der mit n überschriebenen Spalte, die mit (n + 1) überschriebene abzuleiten sein. Durch diese Ableitung erhält man

$$\frac{(n-1)}{1} + 1 + \frac{(n-1)d}{1} + \frac{(n-1)(n-2)d}{1 \cdot 2} =$$
$$\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)d}{1 \cdot 2};$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} + \frac{n-1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)d}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$$
$$\frac{(n-1)(n-2)d}{1 \cdot 2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)d}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

u. s. f.

Da diese Bestimmung eben die Glieder gibt, welche aus dem bei der Tafel B zum Grunde gelegten Gesetze sich für die mit (n + 1) überschriebene Spalte der Tafel A ableiteten: so folgt hieraus, daß, wenn das in B angenommene Gesetz der Bildung der nten Spalte der Tafel a richtig ist, es auch für die (n + 1) Spalte gilt. Das bei der Bildung von B vorausgesetzte Gesetz gilt aber für die 8te, folglich auch für die 9te, und da es für die 9te gilt, ist es auch für die 10te u. s. f., also auch für die nte Spalte der Tafel A wahr.

Nach B ist

$\frac{(n-1)}{1} + \frac{(n-1)(n-2)d}{1 \cdot 2}$ das (n — 1) Glied der Reihe II. unter A,

$\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)d}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ das (n — 2) Glied der Reihe III. unter A,

$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-4)d}{1 \cdot 2 \ldots 4}$ das (n—3) Glied der Reihe IV. unter A,

$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-4)}{1 \cdot 2 \ldots 4} + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-5)d}{1 \cdot 2 \ldots 5}$ das (n—4) Glied der Reihe V. unter A

u. s. f.

Setzt man nun unter B in

II. n für n — 1,

III. n „ n — 2,

IV. n „ n — 3,

V. n „ n — 4 u. s. f., so wird für A das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe von der Ordnung

C

I. zu $1 + (n - 1)d$,

II. „ $\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)d}{1 \cdot 2}$,

III. „ $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)n(n+1)d}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,

IV. „ $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)d}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$,

V. „ $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)d}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

u. s. f.

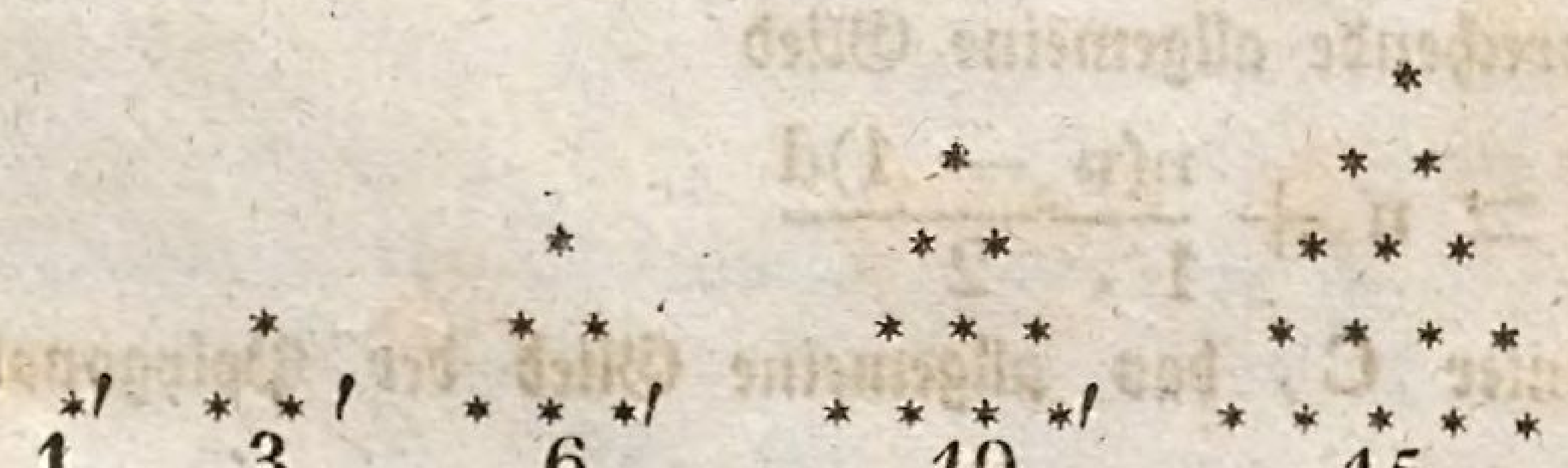
Nach oben ist das allgemeine Glied einer Reihe der nten Ordnung die Summmenformel für die Reihe der (n — 1)ten Ordnung: deshalb ist auch, unter C, III. die Summenformel für die Reihe, deren allgemeines Glied II.; IV. die Summenformel der Reihe, welcher das allgemeine Glied III. zukommt u. s. f.

5) In II. unter C 1 für d gesetzt, gibt

$$(1)\; t = n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

Hierein 1, 2, 3, 4 . . . für n genommen, so entsteht die Zahlenreihe

(a) 1, 3, 6, 10, 15, 21 . . ., welche Reihe sich auch wie folgend darstellen läßt

(b)  u. s. f.

1 3 6 10 15

Wegen dieser figürlichen Darstellung der Reihe (a) heißt sie die Reihe der dreieckigen Zahlen, und (1) das allgemeine Glied der dreieckigen Zahlen.

In II. unter C $d = 2$ gesetzt, gibt

(2) $t = n + n(n - 1) = n^2$, und wenn hierein 1, 2, 3 ... für n gesetzt wird,

1, 4, 9, 16, 25, 36 ...

Wegen der nachfolgenden Darstellung dieser Reihe

```
                          * * * *
                  * * *   * * * *
          * *     * * *   * * * *
(c)  *,   * *,    * * *,  * * * *   u. s. f.
     1     4        9       16
```

wird sie die Reihe der viereckigen und (2) das allgemeine Glied der viereckigen Zahlen genannt.

In II. unter C $d = 3$, und sodann 1, 2, 3 ... für n gesetzt, gibt die Zahlenreihe

(d) 1, 5, 12, 22, 35 u. s. f.,

deren Glieder, wenn man sich die Einheiten derselben als Kugeln denkt, auf einanderfolgend, in fünfeckige Figuren gebracht werden können: weshalb diese Reihe auch die Reihe der fünfeckigen Zahlen heißt.

Das Vorstehende noch weiter fortgesetzt, so überzeugt man sich endlich, daß, wenn in II. unter C, $d = m$ und sodann 1, 2, 3 ... für n gesetzt wird, und die Einheiten der auf einander folgenden Glieder als Kugeln genommen werden, die letztern sich in Form von $(n - 2)$ Ecken neben einander legen lassen.

Die arithmetischen Progressionen der zweiten Ordnung, wie die Reihen (b), (c), (d) u. s. f. werden, wegen ihrer Darstellung durch reguläre Vielecke, Polygonalzahlen und das ihnen entsprechende allgemeine Glied

$$t = n + \frac{n(n - 1)d}{1 \cdot 2}$$

aus II. unter C, das allgemeine Glied der Polygonalzahlen genannt.

Aus diesem allgemeinen Gliede erhält man, nach oben, für d $=1$ das der dreieckigen, für d $=2$ das der viereckigen u. s. f. Zahlen. Die Werthe, die man hier für n annimmt, bestimmen ferner die Menge von Einheiten (etwa von Kugeln), welche bei der figürlichen Darstellung eine Seite enthält, und in sofern heißt n die Wurzel dieser vieleckigen Zahlen. So gibt die obige Formel für d $=1$ und n $=5$ die fünfte dreieckige Zahl 15, die sich durch

```
    *
   * *
  * * *
 * * * *
* * * * *
```

darstellen läßt und für diese heißt 5 oder der Werth für n die Wurzel.

7) Zufolge Nr. 5) ist III. unter C das summatorische Glied für eine Reihe, der II. unter C als allgemeines Glied entspricht: mithin ist III. unter C

$$s = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)n(n+1)d}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

die Summenformel der Polygnalzahlen, und zwar

die Summenformel der dreieckigen Zahlen

$$(1)\quad s = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

die Summenformel der viereckigen Zahlen

$$(2)\quad s = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

die Summenformel der fünfeckigen Zahlen

$$(3)\quad s = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n^2(n+1)}{1 \cdot 2}, \text{ u. s. f.}$$

Nach (2) ist die Summe der fünf ersten Quadratzahlen

$$s = \frac{5(5+1)(10+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 55.$$

In der etwa durch Kugeln dargestellten Reihe der dreieckigen Zahlen aus (b) S. 239, 1 für sich, dann 1 auf 3; 1 und 3 auf 6; 1, 3 und 6 auf 10 u. s. f. gelegt, gibt eine Reihe von dreiseitigen Pyramiden, die auf einander folgend 1, 2, 3... Schichten haben und deren Einheiten dargestellt sind durch die Reihe

1, 4, 10, 20, 35 . . .

Diese Reihe hat (1) oder III. unter C zum allgemeinen Gliede, wenn daselbst d = 1 gesetzt wird. Diesem gemäß besteht eine aus Kugeln zusammengesetzte dreiseitige Pyramide von 18 Schichten, oder mit 18 Kugeln in einer Grundzeile, aus

$$s = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$$ Kugeln.

Eben so, wie vorstehend, läßt sich aus der Reihe der viereckigen Zahlen eine Reihe von vierseitigen Pyramiden bilden, die auf einander folgend 1, 2, 3 ... Schichten haben und deren Einheiten auf einander folgend sind

1, 5, 16, 32, 57 ...

Für solche vierseitige Pyramiden ist das allgemeine Glied, nach (2) oder nach III. unter C Nr. 5), wenn daselbst d = 2 gesetzt wird,

$$s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Die Reihen der drei- und vierseitigen Pyramiden gehören zu der Reihe III. der dritten Ordnung unter A Nr. 5) und es wird deshalb diese Reihe, obschon aus den fünf-, sechs- und mehreckigen Zahlen, durch Kugeln, nicht Pyramiden gebildet werden können, die Reihe der Pyramidalzahlen und zwar die der ersten Ordnung genannt.

Die Reihen IV., V. ... unter A Nr. 5) lassen keine figürliche Darstellung zu, doch nennt man sie dessen ungeachtet die Reihen der Pyramidalzahlen der zweiten, dritten u. s. f. Ordnung.

Auch die Reihe I. unter A Nr. 5) läßt für jeden Werth der Differenz d eine figürliche Darstellung zu, und zwar in Form von geraden Linien. So ist, für d = 1, die aus ihr folgende Reihe

1, 2, 3, 4, 5 ... welche sich auch durch

*, **, ***, ****, ***** u. s. f. darstellen läßt.
1 2 3 3 4

Für d = 2 erhält man aus der gedachten Reihe

1, 3, 5, 7, 9 ... welche Reihe dargestellt ist durch

*, ***, *****, *******, u. s. f.

Wegen der figürlichen Darstellung der Reihen I., II., III. unter A Nr. 5) nennt man sie, mit Zuziehung der folgenden, **figurirte** Reihen, oder die Reihen der figurirten Zahlen.

8) Bildet man durch Kugeln nachfolgende Zusammenstellung

(1) (2) (3) (4)

(a)
* * * * *,

* * * * * *
* * * * * *,

* * * * * * *
* * * * * * *
* * * * * * *,

* * * * * * * *
* * * * * * * *
* * * * * * * *
* * * * * * * *,

u. s. f.

legt (3) auf (4), darauf (2) und hierauf (1): so wird man einen sogenannten länglichen Kugelhaufen erhalten, in welcher Form die Kugeln gewöhnlich in den Zeughäusern aufgeschichtet sind.

Indem die Einheiten von (1) in (a) allgemein durch r ausgedrückt werden, stellt sich die Reihe (a) dar durch

(b) $r,\ 2(r+1),\ 3(r+2),\ 4(r+3),\ 5(r+4)$ u. s. f.

Das nte Glied der Reihe (a) ist demgemäß

(c) $t = n(r + n - 1)$.

Die in (b) erhaltene Reihe läßt sich auch so darstellen

$$\left.\begin{array}{l} 1r \\ 2r + 2.1 \\ 3r + 2.3 \\ 4r + 2.6 \\ 5r + 2.10 \\ 6r + 2.15 \\ \ldots\ldots \end{array}\right\}$$ und gibt für die Summe der n ersten Glieder

(d) $(1+2+3+4 \ldots n)r + 2(1+3+6+10+15 \ldots)$.

Der Faktor von r besteht aus der Summe der n ersten natürlichen Zahlen, welche, nach II. unter C, beträgt

$$n + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} = \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2}.$$

Das 2te Glied unter (d) ist die doppelte Summe der $(n-1)$ten dreieckigen Zahlen, und deren Summe nach (1) Nr. 7)

$$\frac{2(n-1)\,n\,(n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Diesem gemäß ist die Summe der n ersten Glieder der Reihe (b)

$$\text{I. } s = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} r + \frac{2(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \quad 3} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}[r + \tfrac{2}{3}(n-1)].$$

Mittels dieser Formel ist die Anzahl der Kugeln irgend eines länglichen Kugelhaufens zu berechnen, wenn man die r Kugeln der obersten Zeile oder des Rückens und die Menge der Schichten oder die Menge der Kugeln einer Seitenkante weiß.

Nach (c) ist das nte Glied der in (a) angegebenen Reihe

$$t = n(r + n - 1).$$

In einem aus den Gliedern der Reihe (a) gebildeten Kugelhaufen formt das nte Glied die nte Schicht oder Lage vom Rücken aus gezählt. In dieser nten Schicht bezeichnet ferner n die Kugeln der mit dem Rücken nicht gleichlaufenden Seite. Nennt man die Anzahl der Kugel der nten Schicht in der Zeile, welche mit dem Rücken gleichlaufend ist, l: so ist diese nte Schicht auch

$t = nl$ oder

$nl = n(r + n - 1)$ oder

$l = r + n - 1$ und hieraus folgt

$l - n + 1 = r; \quad l - r + 1 = n.$

Den Werth für l und den für n in I. gesetzt, gibt

$$\text{II. } s = \frac{n(n+1)(3l - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

$$\text{III. } s = \frac{(l - r + 1)(l - r + 2)(2l + r)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Die Formel II. dient zur Berechnung der Kugeln eines länglichen Kugelhaufens, wenn die Anzahl l der Kugeln der längern Grundzeile und die Anzahl n der Kugeln der kürzern Grundzeile; die Formel III. aber, wenn die Anzahl n der Kugeln im Rücken und die Anzahl l der mit dem Rücken gleichlaufenden Grundzeile bekannt sind.

9) Durch Kugeln von gleicher Größe mögen die nachfolgende Figuren gebildet sein:

(a)
(1) ********,
(2) *******,
(3) ********
********,
(4) *******
*******,

(5) ********
****
********,
(6) *******
****
*******,
(7) ********
****
****
******** u. s. f.

Legt man etwa auf die (7)te Kugelschicht die (6)te, darauf die (5)te und fährt so bis zur ersten fort: so erhält man einen länglichen Kugelhaufen, der nur mit einer Seite frei steht, mit drei Seiten sich aber an Wände anlehnt.

Die Summenformel für einen solchen Kugelhaufen soll im Nachstehenden bestimmt werden.

Die Einheiten von (1) durch r bezeichnet, so sind die Einheiten von

(3) gleich $2r = r \cdot \frac{3+1}{2}$

(5) „ $3r = r \cdot \frac{5+1}{2}$

(7) „ $4r = r \cdot \frac{7+1}{2}$, folglich von

(n) „ $r = r \cdot \frac{n+1}{2}$.

Die Reihe, welche (1), (3), (5), (7) . . . umfaßt, ist

$$r,\ 2r,\ 3r,\ 4r \ldots = r(1 + 2 + 3 + 4 \ldots)$$

und ihr mit n überschriebenes Glied $r \cdot \frac{n+1}{2}$, mithin die Reihe von r bis $r \cdot \frac{n+1}{2}$,

$$(b)\quad r\left(1+2+3+4\ldots\frac{n+1}{2}\right) = r \cdot \frac{n+1}{2.2}\left(1+\frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{r(n+1)(n+3)}{8},$$

denn diese arithmetische Reihe hat $\frac{n+1}{2}$ Glieder und wenn in die Formel III. Nr. 4)

$$\frac{n}{2}(a+t),\ \frac{n+1}{2} \text{ für } n,\ 1 \text{ für } a \text{ und } \frac{n+1}{2} \text{ für } t$$

gesetzt wird, ergibt sich die obige Summe.

Die aus (a) zwischen 1 und n enthaltenen, mit (2), (4), (6) ... überschriebenen Schichten bilden die Reihe

$$(r-1),\ 2(r-1),\ 3(r-4) \ldots \frac{n-1}{2}(r-1),$$

deren Summe

$$\frac{n-1}{2 \cdot 2}\left(1+\frac{n-1}{2}\right)(r-1) = \frac{(n-1)(n+1)(r-1)}{8} \text{ ist.}$$

Diese Summe zu der in (b) enthaltenen genommen, gibt

$$\text{I. } s = \frac{r(n+1)(n+3)}{8} + \frac{(n-1)(n+1)(r-1)}{8} = \frac{(n+1)}{8}[r(n+3) + (n-1)(r-1)]$$

als Summenformel für die n ersten Glieder der in (a) dargestellten figurirten Reihe, wenn n eine ungerade Zahl darstellt, oder es ist dieser Ausdruck die Summenformel für einen mit drei Seiten anliegenden Kugelhaufen, der aus n Kugelschichten besteht und im Rücken r Kugeln hat.

Bei Kugelhaufen, welche mit drei Seiten anliegen, ist n gewöhnlich eine ungerade Zahl. Sollte aber n eine gerade Zahl sein, so nehme man die nächst größere ungerade Zahl in die Formel I. und ziehe von den gefundenen Kugeln die der hinzugesetzten Schicht, welche mittels des nten Gliedes

$$r \cdot \frac{n+1}{2}$$

zu ermitteln sind, ab.

Hat z. E. ein mit drei Seiten anliegender Kugelhaufen im Rücken 8 Kugeln und überhaupt 10 horizontale Schichten: so setze man in I. 8 für r und 11 für n, und man erhält

$$s = \tfrac{12}{8}(8 \cdot 14 + 10 \cdot 7) = 273 \text{ Kugeln.}$$ Dem Haufen wurde die 11te Schicht mit $r \cdot \frac{n+1}{2} = 8 \cdot 6 = 48$

Kugeln, die er nicht hat, zugegeben, mithin hat der Kugelhaufen

$$273 - 48 = 225 \text{ Kugeln.}$$

10) Längliche Kugelhaufen können auch mit zwei Seiten frei und mit zwei Seiten an Wände angelehnt sein.

Von einem solchen Kugelhaufen mag die oberste Zeile oder der Rücken aus 7 Kugeln bestehen. Die auf einander folgenden Schichten werden dann sein

```
         ******            ******   *******
*******, ******, *******   ******   *******
                 *******   ******   *******
                 *******,  ******   *******
                           ******,  ******* u. s. f.
```

Die Anzahl der Kugeln im Rücken gleich r gesetzt, gibt die in den auf einander folgenden Schichten enthaltenen Kugeln zu

(a) $r,\ 2(r-1),\ 3r,\ 4(r-1),\ 5r,\ 6(r-1),\ 7r \ldots (n-1)(r-1),\ nr$;

wenn n eine ungerade Zahl bezeichnet. Diese Reihe zerlegt sich zur bequemeren Summirung in die zwei nachfolgenden

(b) $r + 3r + 5r + 7r \ldots + nr = r(1 + 3 + 5 + 7 \ldots + n)$

(c) $2(r-1) + 4(r-1) + 6(r-1 \ldots (n-1)(r-1) =$

$$2(r-1)\left(1 + 2 + 3 \ldots \frac{n-1}{2}\right).$$

Das Glied n der Reihe (b) ist für diese das $\frac{n+1}{2}$te; folglich die Summe ihrer n ersten Glieder

(d) $\frac{n+1}{2.2}[1+n]r = \frac{(n+1)^2 r}{4}$,

und das Glied $\frac{n-1}{2}$ der Reihe (c) das $\frac{n-1}{2}$te derselben; mithin die Summe der Reihe (c)

(e) $2(r-1).\ \frac{n-1}{4}\left(1 + \frac{n-1}{2}\right) = \frac{(r-1)(n-1)(n+1)}{4}$.

Aus (d) und (e) ergibt sich die Summe der n ersten Glieder der Reihe (a), wenn n eine ungerade Zahl darstellt, oder die Anzahl der Kugeln eines mit zwei Seiten anliegenden länglichen Kugelhaufens zu

$$\text{I. } s = \frac{r(n+1)^2}{4} + \frac{(r-1)(n-1)(n+1)}{4} =$$
$$\frac{n+1}{4}[r(n+1)+(r-1)(n-1)].$$

Mit zwei Seiten an Wände angelegte viereckige Kugelhaufen haben immer (der sichern Lage wegen) eine ungerade Menge von Schichten, deren Anzahl in I. durch n ausgedrückt ist. Aber auch die Kugeln eines Haufens, der eine gerade Anzahl von Schichten hat, sind nach der Formel I. zu berechnen. Man setzt nämlich für die gerade Zahl p die nächstfolgende ungerade $n = p + 1$ und zieht von der Menge der gefundenen Kugeln die der zugesetzten nten Schichte gleich rn ab und es ergibt sich die Anzahl der Kugeln zu

$$\text{II. } s = \frac{n+1}{4}[r(n+1)+(r-1)(n-1)] - nr.$$

11) Es gibt auch längliche Kugelhaufen, die nur mit einer Seite angelehnt sind. Im Rücken eines solchen Haufens 5 Kugeln angenommen: so sind die auf einander folgenden Schichten

```
*****,  ******,  *******    ********
                 *******,   ********,

                 *********   **********
                 *********   **********  u. s. f.
                 *********,  **********
```

Die Menge der Kugeln, welche den Rücken eines solchen Haufens bilden, durch r bezeichnet: so stellen sich die Kugeln der auf einander folgenden Schichten wie nachstehend dar.

(a) $r,\ (r+1),\ 2(r+2),\ 2(r+3),\ 3(r+4),\ 3(r+5),$
$4(r+6),\ 4(r+7,\ 5(r+8)\ldots\frac{n-1}{2}(r+n-2)+,$
$\frac{n+1}{2}(r+n-1),$

wo n eine ungerade Zahl bezeichnet.

Aus (a) ergeben sich die zwei nachstehenden Reihen

(b) $r+2(r+2)+3(r+4)+4(r+6)\ldots\frac{n+1}{2}(r+n-1),$

(c) $(r+1)+2(r+3)+3(r+5)+4(r+7)\ldots\frac{n-1}{2}(r+n-2).$

Die Reihe (b) zerfällt wieder in die zwei folgenden:

$$(d)\quad r+2r+3r+4r\ldots\frac{(n+1)}{2}r = r\left(1+2+3+4\ldots\frac{n+1}{2}\right)$$

$$(e)\quad 4+12+24+40\ldots\frac{n^2-1}{2} = 4\left(1+3+6+10\ldots\frac{n^2-1}{8}\right).$$

Die Reihe (d) hat $\frac{n+1}{2}$ Glieder, und die Reihe (e), da ihr gemäß (b) ein Glied weniger zukommt, nur $\frac{n-1}{2}$ Glieder: folglich die Summe von (d) gleich

$$(f)\quad r\,.\,\frac{n+1}{2\,.\,2}\left(1+\frac{n+1}{2}\right) = \frac{r(n+1)(n+3)}{8};$$

und die Summe der Reihe (e) zufolge Seite 241, wenn $\frac{n-1}{2}$ für das dortige n gesetzt wird,

$$(g)\quad = \frac{4(n-1)(n+1)(n+3)}{2\,.\,4\,.\,6} = \frac{(n-1)(n+1)(n+3)}{12},$$

und nach (f) und (g) die Summe der Reihe (b)

$$(h)\quad = \frac{r(n+1)(n+3)}{8} + \frac{(n-1)(n+1)(n+3)}{12} = \frac{(n+1)(n+3)\,[3r+2(n-1)]}{24}.$$

Die Reihe (c) zerlegt sich in

$$(i)\quad r+2r+3r+4r+5r\ldots\frac{n-1}{2}r = r\left(1+2+3+4+5\ldots\frac{n-1}{2}\right),$$

$$(k)\quad 1+6+15+28\ldots\frac{(n-1)}{2}(n-2)$$

und es hat jede von diesen Reihen $\frac{n-1}{2}$ Glieder.

Die Summe der Reihe (i) ist

$$(l)\quad r\,.\,\frac{n-1}{2\,.\,2}\left(1+\frac{n-1}{2}\right) = \frac{r(n-1)(n+1)}{8} = \frac{r(n^2-1)}{8},$$

Die Reihe (k) besteht aus den $\frac{n-1}{2}$ ersten sechseckigen Zahlen.

In die Summenformel

$$\frac{n(n+1)(4n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

derselben $\frac{n-1}{2}$ für n gesetzt, so erhält man die Summe der Reihe (k) zu

$$(m) \quad \frac{(n^2-1)(2n-3)}{24}.$$

Aus (l) und (m) folgt die Summe der Reihe (c) zu

$$\frac{r(n^2-1)}{8} + \frac{(n^2-1)(2n-3)}{24} = \frac{n^2-1}{8}\left(r + \frac{2n-3}{3}\right);$$

und hieraus und aus (h) die Summe der Reihe (a) und die Anzahl der Kugeln eines länglichen mit einer Seite an einer Wand anliegenden Kugelhaufens, der n Schichten und im Rücken r Kugeln hat, zu

$$\text{I. } s = \frac{(n+1)(n+3)[3r+2(n-1)]}{24} + \frac{(n^2-1)(3r+2n-3)}{24} =$$

$$\frac{n+1}{24}[(n+3)(3r+2(n-1)) + (n-1)(2n+3(r-1))].$$

Diese Formel gilt nur dann, wenn der Kugelhaufen aus einer ungeraden Anzahl von Schichten besteht, was, der Standfähigkeit halber, fast immer der Fall ist. Hat er aber eine gerade Anzahl p derselben, so setze man in I. die zu p gehörende nächst größere ungerade Zahl

$$n = p + 1$$

und ziehe hiervon das letzte Glied der Reihe (b) und das der Reihe (c) ab, wo gleichfalls $n = p + 1$ zu nehmen ist.

12) Zu der Reihe

(a) $a;\ a+b;\ a+2b+c;\ a+3b+3c;\ a+4b+6c;$
$a+5b+10c;\ a+6b+15c \ldots$

gehört die Differenzenreihe

$$b,\ b+c,\ b+2c,\ b+3c,\ \ldots;$$

die Reihe (a) ist demgemäß (Nr. 2) Seite 232) eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung.

Die Reihe (a) zerlegt sich in die Reihen

(b) $a;\ a+b;\ a+2b;\ a+3b;\ a+4b;\ a+5b;\ \ldots$

(c) $c;\ 3c;\ 6c;\ 10c;\ \ldots$

Die Reihe (b) ist eine arithmetische der ersten Ordnung (Nr. 2) Seite 232), und deshalb ihr allgemeines oder ntes Glied

(d) $t = a + (n-1)b$,

und die Summe ihrer n ersten Glieder

(e) $s = \frac{n}{2}(a+t) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$.

Die Reihe (c) ist die cfache Reihe der dreieckigen Zahlen, und darum (1) Seite 241) ihr ntes Glied

(f) $c \cdot \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$,

und die Summe ihrer n ersten Glieder

(g) $c \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Das (n—2)te Glied der Reihe (c) gehört zum nten Gliede der Reihe (b), deshalb in (f) und (g) (n — 2) für n gesetzt, den so aus (f) folgenden Ausdruck zu (d) und den aus (g) sich ergebenden in (e) genommen, so ergibt sich für die arithmetische Reihe (a) der zweiten Ordnung das nte Glied zu

$$T = a + (n-1)b + \frac{c(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2} =$$
$$a + (n-1)\left(b + \frac{c(n-2)}{2}\right),$$

und die Summe ihrer n ersten Glieder zu

$$S = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) + \frac{c(n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

13) Die Reihe

(a) $a;\ a+b;\ a+2b+c;\ a+3b+3c+d;\ a+4b+6c+4d;$
$a+5b+10c+10d;\ a+6b+15c+20d;$
$a+7b+21c+35d\ \ldots$

muß eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung sein, weil die Differenzen aus den auf einander folgenden Gliedern eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung bilden.

Die Reihe (a) zerlegt sich in

(b) $a; \quad a + b; \quad a + 2b + c;$
$a+3b+3c; \; a+4b+6c; \; a+5b+10c; \; a+6b+15c \ldots$ und

(c) $d; \quad 4d; \quad 10d; \quad 20d \ldots$

Die Reihe (b) ist der Reihe (a) in Nr. 12) ganz gleich, demnach ihr ntes Glied

$$(d) \; t = a + (n-1)\left(b + \frac{c(n-2)}{2}\right),$$

und die Summe ihrer n ersten Glieder

$$(e) \; s = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) + \frac{c(n-2)(n-1)n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Aus der Reihe (c) d als Faktor gezogen und man erhält

$1, \; 4, \; 10, \; 20 \ldots,$

welches die Reihe der dreieckigen Pyramidalzahlen ist.

Demgemäß ist das nte Glied der Reihe (c)

$$(f) \; \frac{dn(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

und die Summe ihrer n ersten Glieder

$$(g) \; \frac{dn(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}.$$

Das (n — 3)te Glied der Reihe (c) zum nten Gliede der Reihe (b) genommen, gibt das nte Glied der Reihe (a): man erhält sonach das nte Glied der Reihe (a), wenn in (f) (n—3) für n gesetzt, der gefundene Ausdruck zu (d) genommen; ferner die Summe der n ersten Glieder der Reihe (a), wenn (n—3) für n in (g) gesetzt und der gefundene Ausdruck zu (e) addirt wird. Nämlich

$$\text{I.} \; T = a + (n-1)\left(b + \frac{c(n-2)}{2}\right) + \frac{d(n-3)(n-2)(n-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} =$$
$$a + (n-1)\left[b + \frac{(n-2)}{2}\left(c + \frac{d(d-3)}{3}\right)\right];$$

$$\text{II.} \; S = \frac{n}{2}(2a+(n-1)b) + \frac{c(n-2)(n-1)n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{d(n-3)(n-2)(n-1)n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$$
$$= \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)\left(b + \frac{n-2}{3}\left(c + \frac{d(n-3)}{4}\right)\right)\right].$$

Von einer arithmetischen Progression der dritten Ordnung mögen die vier ersten Glieder

(1) 1, 3, 8, 20 sein.

Mit Rücksicht auf (a) ist

$a=1$; $a+b=3$; $a+2b+c=8$; $a+3b+3c+d=20$;
$b=2$; $c=8-1-4=3$; $d=20-1-6-9=4$.

Diese Werthe in I. und II. gesetzt, so erhält man das allgemeine Glied der in (1) angefangenen Reihe zu

$$(2)\quad T=1+(n-1)\left[2+\frac{n-2}{2}\left(3+\frac{4(n-3)}{3}\right)\right],$$

und ihre Summenformel zu

$$(3)\quad S=\frac{n}{2}\left[2+(n-1)\left(2+\frac{n-2}{3}\left(3+\frac{4(n-3)}{4}\right)\right)\right].$$

Von der in (1) angefangenen Reihe ist nach (2) das 7te Glied

$$T=1+6\left[2+\tfrac{5}{2}\left(3+\frac{4\cdot 4}{3}\right)\right]=$$
$$=1+6\left(2+\frac{5\cdot 25}{6}\right)=138;$$

und nach (3) die Summe ihrer 7 ersten Glieder

$$S=\tfrac{7}{2}\left[2+6\left(2+\tfrac{5}{3}\left(3+\frac{4\cdot 4}{4}\right)\right)\right]=$$
$$=\tfrac{7}{2}\left[2+6\left(2+\frac{35}{3}\right)\right]=294.$$

Für arithmetische Reihen der vierten, fünften und höherer Ordnungen wird das allgemeine und summatorische Glied eben so wie für die Reihen der zweiten und dritten Ordnung gefunden: weshalb wir jetzt zu den geometrischen Reihen übergehen wollen.

14) Gemäß Nr. 1) Seite 231 ist

(1) a, ae, ae^2, ae^3, ae^4 . . .

eine geometrische Reihe, und das nte Glied, dessen Werth durch t ausgedrückt,

I. $t=ae^{n-1}$,

Die Größe e, mit welcher irgend ein Glied multiplizirt werden muß, um das nächst folgende zu erhalten, wird der Exponent genannt.

Die Summe der n ersten Glieder der geometrischen Reihe (1) sei s, oder

$$s = a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 \ldots + ne^{n-1}.$$

Diese Gleichung mit e multiplizirt und s abgezogen, gibt

$$\begin{cases} es = ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 \ldots + ae^{n-1} + ae^n \\ s = a + ae + ae^2 + ae^3 \ldots + ae^{n-1} \end{cases}$$

$$s(e - 1) = ae^n - a$$

$$\text{II.}\quad s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}.$$

Den Werth für a aus I. in II. gesetzt, gibt

$$\text{III.}\quad s = \frac{t(e^n - 1)}{e^{n-1}(e - 1)}.$$

Aus (1) wird auch

$$e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} = \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Diesen Werth statt e in II. eingeführt, und man erhält

$$\text{IV.}\quad s = a\left\{\frac{\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} - 1}{\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}} - 1}\right\} = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Aus I. wird $e^{n-1} = \frac{t}{a}$; $e^n = \frac{et}{a}$;

aus II. wird $e^n = \frac{s(e-1)}{a} + 1$,

und aus der Vergleichung der beiden Werthe von e^n

$$\frac{s(e - 1)}{a} + 1 = \frac{et}{a},$$

$$\text{V.}\quad s = \frac{et - a}{e - 1}.$$

Durch die hier gefundenen fünf Gleichungen sind alle auf geometrische Progressionen sich beziehenden Aufgaben zu lösen.

15) Nach II. Nr. 14) ist für eine geometrische Reihe

$$s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}.$$

Hierein für den Exponenten e den echten Bruch $\frac{p}{q}$ und $n = \infty$ d. h. unendlich groß oder größer als jede angebbare Zahl gesetzt, gibt

$$\text{I. } s = a\left\{\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\infty} - 1}{\frac{p}{q} - 1}\right\} = a\left\{\frac{0 - 1}{\frac{p}{q} - 1}\right\} = \frac{aq}{q - p},$$

denn es ist das Produkt aus einem echten Bruche, unendlich oder ohne Ende oft mit sich multiplizirt, eine nicht angebliche kleine Größe oder 0.

Durch I. wird die Summe einer ohne Ende fortlaufenden geometrischen Progression bestimmt, deren Exponent ein echter Bruch $\frac{p}{q}$ ist.

Für die ohne Ende fortgehende geometrische Progression

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} \ldots$$

ergibt sich nach I. als Summe

$$s = \frac{1 \cdot 2}{2 - 1} = 2.$$

Auch periodische Dezimalbrüche sind nach der Formel I. zu summiren, oder in gemeine zu verwandeln. So ist

$$0{,}545454\ldots = \tfrac{54}{100} + \frac{54}{10000} + \frac{54}{1000000} \ldots = \frac{\tfrac{54}{100} \cdot 100}{100 - 1} = \tfrac{54}{99}.$$

16) Die geometrischen Progressionen gestatten vielfache Anwendungen; einige derselben mögen hier nachfolgen.

Werden die Zinsen eines Kapitales nach einem Jahre zum Kapitale geschlagen und die ganze Summe als Zinsen tragendes Kapital im zweiten Jahre angenommen und so fortgefahren: so sagt man, das Kapital sei auf Zinseszinsen verliehen. Den Zuwachs, den ein solchergestalt verliehenes Kapital nach n Jahren erhält, nennt man das njährige Interusurium.

Der Zinsfuß eines Kapitales, d. h. die Zinsen, welche 1 Thlr. vom Kapitale jährlich trägt, sei f, so wird ein Kapital A

nach 1 Jahre zu $A + Af = A(1 + f) = B$,

" 2 Jahren " $B + Bf = (1 + f)B + A(1 + f)^2 = C$,

" 3 " " $C + Cf = (1 + f)C = A(1 + f)^3$, folglich

" n " " . $A(1 + f)^n$

angewachsen, oder wenn man den Werth, den ein zu Zinseszinsen verliehenes Kapital nach n Jahren erlangt hat, durch S bezeichnet, sein

$$\text{I.} \quad S = A(1 + f)^n$$

und das njährige Interusurium, durch J bezeichnet,

$$\text{II.} \quad J = A(1+f)^n - A = A[(1 + f)^n - 1].$$

Um die Formel I. durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir bestimmen, zu wieviel ein Kapital von 5000 Thlrn. nach 6 Jahren mit Zinseszinsen zu 4 p. C. angewachsen ist.

Ein Thaler dieses Kapitals gibt jährlich

$$\tfrac{4}{100} = \tfrac{1}{25} = f.$$

Mit Rücksicht auf I ist ferner

$$n = 6, \quad A = 5000, \text{ mithin}$$

$$S = 5000(1 + \tfrac{1}{25})^6 = 5000(\tfrac{26}{25})^6,$$

logarithmisch ausgeführt

$$S = 6326{,}591 \text{ Thlr.} = 6236 \text{ Thlr. } 14 \text{ gl.}$$

17) Bei den auf Zinseszinsen angelegten Kapitalen wird bisweilen jährlich eine bestimmte Summe zugesetzt oder weggenommen. Um einen derartigen Fall allgemein aufzulösen, denken wir uns ein mit dem Zinsfuße f auf Zinseszinsen angelegtes Kapital A, dem nach Verfluß eines jeden Jahres noch B Thlr. zugelegt werden.

Das Kapital A erhält nach n Jahren den Werth

$$(1) \quad A(1 + f)^n.$$

Was die jährliche Zulage B anbelangt, so können wir uns jede als ein auf Zinseszinsen angelegtes Kapital denken. Solcher Kapitale sind aber n, jedes gleich B; es steht

das 1te (n — 1) Jahre
" 2te (n — 2) "
" 3te (n — 3) "
. . . .
" nte 0 "

es wächst an

das 1te zu $B(1+f)^{n-1}$,
" 2te " $B(1+f)^{n-2}$,
" 3te " $B(1+f)^{n-3}$,
. . . .
" (n–1)te " $B(1+f)$,
" nte " B,

und ihre Summe ist

$$(2)\quad s = B[1+(1+f)+(1+f)^2 \ldots + (1+f)^{n-2} + (1+f)^{n-1}] =$$

$$= B \cdot \frac{(1+f)^n - 1}{(1+f) - 1} = B \cdot \frac{(1+f)^n - 1}{f},$$

denn für die Summenformel Nr. II) Seite 254

$$s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$$ ist hier $a = 1$ und $e = 1 + f$.

Aus (2) und (1) folgt nun

$$\text{I.}\quad S = A(1+f)^n + \frac{B}{f}((1+f)^n - 1),$$

als Werth des auf Zinseszinsen verliehenen Kapitales, wenn demselben nach jedem Jahre B Thlr. zugelegt werden. Würden diesem Kapitale aber nach jedem Jahre B Thlr. entzogen, so würde sein Werth nach dem nten Jahre betragen:

$$\text{II.}\quad S = A(1+f)^n - \frac{B}{f}((1+f)^n - 1).$$

Ein auf Zinseszinsen angelegtes Kapital A heißt Mise, wenn von demselben jährlich eine bestimmte, die Zinsen überschreitende Summe B weggenommen wird, bis am Ende das Kapital aufgezehrt ist, und die Summe B eine Zeitrente, Jahrrente, wohl auch Annuität. Gibt Jemand einem Anderen eine Summe A mit den eben gestellten Bedingungen, so heißt der, welcher die Summe A empfängt und dafür jährlich B auszahlt, der Entrepreneur (Unternehmer); und der, welcher die Summe A gibt und dafür jährlich B oder eine Rente erhält, der Rentenirer.

Kapitalisten geben bisweilen ihr Vermögen A einem Zweiten, und ziehen von diesem, zu ihrem Unterhalte, jährlich eine Summe B bis zu ihrem Tode unter der Bedingung, daß sodann die Zahlung des Entrepreneurs aufhört, das gegebene Kapital mag abgetragen sein oder nicht. Eine solche Rente wird Lebens- oder Leibrente genannt und es ist, wenn man außer dem Zinsfuße f und dem Kapitale A noch die Jahre kennt, auf welche die Leibrente bezogen werden soll, die jährliche Rente B nach II. zu bestimmen; denn es wird nothwendig dann $S = 0$ oder

$$A(1 + f)^n = \frac{B}{f}((1 + f)^n - 1),$$

wenn keiner von beiden etwas gewinnen soll.

Die Jahre n nun, auf welche für irgend eine Person die Leibrente zu bezahlen sein dürfte, ergeben sich näherungsweise aus den Mortalitätstafeln (Sterblichkeitstafeln). Diese Tafeln enthalten nämlich das Alter, das Personen unter gewissen Umständen erreicht haben.

Aufgaben
für arithmetische und geometrische Progressionen.

1) Ein Dach besteht aus 36 übereinander liegenden Ziegelreihen. Jede abwärts gehende Reihe hat 2 Ziegeln mehr als die ihr vorhergehende, und in der untersten Schicht liegen 251 Ziegeln. Aus wieviel Stück Ziegeln besteht die ganze Bedachung?

2) Ein Körper durchläuft in der ersten Sekunde seiner Bewegung 3 Fuß und in jeder folgenden $1\frac{1}{2}$ Fuß mehr als in der vorhergehenden. Welchen Weg wird dieser Körper in der 17ten Sekunde und welchen in den ersten 17 Sekunden durchlaufen?

3) Ein in Bewegung begriffener Körper legt in jeder folgenden Sekunde einen um eine bestimmte Anzahl von Fußen kleineren Weg zurück. Solchergestalt ist er nach 20 Sekunden in Ruhe gekommen und hat in dieser Zeit den Weg von 150 Fuß durchlaufen. Um wieviel Fuß vermin-

derte sich der Weg von Sekunde zu Sekunde, und welchen Weg durchlief er in der ersten Sekunde?

4) Wieviel Schläge geschehen während 24 Stunden auf die Stundenschelle einer Uhr?

5) Bei dem Graben eines Brunnens bezahlte man für die erste Tiefenelle 1 gl. 4 pf., für jede folgende aber 8 pf. mehr als für die vorhergehende und so kostete der Brunnen 350 Thlr. Wie tief wurde er gegraben?

6) Ein Künstler nahm einen jungen Menschen zum Gehülfen an. Jeden Monat des ersten Jahres erhielt der Gehülfe 2 Thlr., jeden Monat des zweiten Jahres 3 Thlr., und so den Monat eines jeden folgenden Jahres 1 Thlr. mehr als im vorhergehenden. Als der Gehülfe den Künstler verließ, hatte er an Gehalt 1000 Thlr. erhalten. Wie lange war der Gehülfe beim Künstler?

7) Eine meiner Taschenuhren, die übrigens einen gleichförmigen Gang hat, geht schneller als sie soll, und zwar so, daß wenn ich sie heute um 12 Uhr nach der richtig gehenden Stadtuhr stelle, sie darauf statt 1 Uhr schon 1 Uhr $\frac{1}{2}$ Minute, statt 2 Uhr schon 2 Uhr 1 Minute u. s. f. zeigt. Wie viel wird die Thurmuhr den folgenden Tag zeigen, wenn es nach meiner Uhr 7 Uhr des Abends ist, und nach wieviel Stunden wird meine Uhr mit der Stadtuhr wieder gleiche Stunde zeigen?

8) Zwischen 5 und 11 sollen noch 18 Zahlen so eingeschaltet werden, daß sie eine arithmetische Progression bilden. Wie groß muß die Differenz genommen werden?

9) Die Summe einer arithmetischen Progression soll s, die Differenz aus dem ersten und letzten Gliede m und das Produkt aus eben diesen Gliedern um p größer als die Summe der ganzen Progression sein. Wie groß ist das erste, wie groß das letzte Glied, aus wieviel Gliedern besteht die ganze Progression und welche Differenz findet zwischen je zwei Gliedern statt?

10) Die Summe der n ersten Glieder einer Progression ist $3an - 5(a + b)(n + 1)$. Welcher Ausdruck stellt das nte Glied dieser Progression dar?

11) Ein freistehender vierseitiger Kugelhaufen hat in der einen Seite seiner Grundzeile 23 und in der angrenzenden 17 Kugeln. Aus wieviel Kugeln besteht er?

12) Eine von Kugeln aufgeführte nicht vollständige viereckige Pyramide hat in einer Zeile der Grundfläche 31 und in einer Zeile der Endfläche 16 Kugeln. Aus wieviel Kugeln ist die unvollständige Pyramide zusammengesetzt?

13) Wie groß ist die Summe der zwischen 100 und 300 lieliegenden ungeraden Zahlen?

14) Wie groß ist die Summe der 100 ersten Quadratzahlen?

15) Es soll die Summenformel für die Kubikzahlen bestimmt werden?

16) Welcher Ausdruck gibt die Summe der Quadrate der n ersten ungeraden Zahlen an?

17) Es ist die Summenformel für die dritten Potenzen der n ersten geraden Zahlen zu bestimmen.

18) Es soll eine geometrische Progression von 11 Gliedern mit dem Anfangsgliede 5 und dem Schlußgliede 31 gebildet werden. Wie groß muß der Exponent angenommen werden und wieviel beträgt die Summe aller 11 Glieder?

19) Das erste Glied einer geometrischen Progression soll 3, das letzte 11 und die Summe aller Glieder 75 betragen. Aus wieviel Gliedern muß die Progression bestehen?

20) Ein Körper durchlief in der ersten Sekunde den Weg a, in der zweiten die Hälfte und in der dritten das Drittel desselben u. s. f. Welchen Weg legte der Körper bis zu dem Augenblicke zurück, wo er in Ruhe kam?

21) Ein sich bewegender Punkt legte in jeder Sekunde $\frac{1}{4}$ Weges mehr zurück, als in der vorhergehenden. Wenn er nun in der ersten Sekunde seiner Bewegung 7' Fuß durchlief, wieviel wird er dann in der 11ten Sekunde und wieviel in allen 11 Sekunden zusammen zurückgelegt haben?

22) August der Starke zerbrach (wie die Anekdote sagt) einem Hufschmiede, während derselbe sein Pferd beschlug, ein Hufeisen mit den Händen, um ihm die Nichthaltbarkeit desselben darzuthun, worauf der Hufschmied erwiederte: „Die Speziesthaler, Ew. Durchlaucht, sind nicht fester als meine Hufeisen, denn ich kann diese ebenfalls mit den Händen zerbrechen". Erstaunt über die Kraft, welche der Hufschmied zu besitzen vorgab, versprach ihm August für den ersten der 32 Nägel, welche zum Heften der vier Hufeisen erforderlich sind, 1 Pfennig, und für jeden folgenden doppelt soviel als für den vorhergehenden, wenn er einen Speziesthaler mit den Händen zerbrechen würde. Welche Summe hatte August der Starke dem Hufschmiede zu geben, wenn er den Spezies zerbrach?

23) Jemand legt ein Dampfschiff auf einem Flusse an, und hat dadurch eine Gesammtausgabe von 6000 Thlrn. Wieviel muß der jährliche reine Gewinn betragen, wenn er in 15 Jahren wieder zu dem verausgabten mit $3\frac{1}{2}$ p. C. zu verzinsenden Kapitale gelangen soll?

24) Eine Braupfanne, welche neu 350 Thlr. kostete, war 10 Jahre hindurch brauchbar und sodann noch $87\frac{1}{2}$ Thlr. werth. Wieviel betrug die jährliche Abnutzung derselben bei 4 p. C.?

25) Ein Jude borgt einem Offizier 600 Thlr. auf drei Jahre. In der Schuldverschreibung muß aber der Offizier statt dieser Summe 800 Thlr. schreiben. Zu wieviel p. C. verzinset er das Kapital mit Unterlegung von Zinseszinsen?

26) Nach welcher Zeit hat sich ein zu p p. C. auf Zinseszinsen verliehenes Kapital verdoppelt?

27) Wenn bei Christi Geburt mit 5 p. C. 1 Pfennig auf Zinseszinsen angelegt worden wäre, zu welcher Summe würde derselbe im Anfange des Jahres 1834 angewachsen sein?

28) Jemand ist jetzt 46 Jahre alt und es steht, gemäß seiner körperlichen Beschaffenheit, zu erwarten, daß er ein Alter von 75 Jahren erreicht. Welche Leibrente, zu 4 p. C.

gerechnet, wird man ihm auf die Mise von 18000 Thlrn. gewähren können?

29) Welches Kapital muß man anlegen, um während 30 Jahren eine jährliche Rente von 600 Thlrn. ziehen zu können?

30) Von jetzt an gerechnet sind nach 7 Jahren 3800 Thlr. zu bezahlen. Welchen baaren oder gegenwärtigen Werth hat dieses Kapital zu 5 p. C.?

31) Für ein Rittergut will A 26000 Thlr. nach 2 Jahren und
B 30000 „ „ 5 „
beide Kapitale bis zur Zeit ihrer Zahlbarkeit unverzinsbar geben. Welches Gebot ist das bessere?

32) Ohne Zinsen sind zahlbar
300 Thlr. nach 1 Jahre,
350 „ „ 3 Jahren,
400 „ „ 5 Jahren.
Durch welche Summe können diese Kapitalien nach 2 Jahren mit $3\frac{1}{2}$ p. C. abgetragen werden?

33) Ein eben angestellter junger Mann, den man um seinen Gehalt fragte, antwortete wie nachstehend: Wenn ich zu Ende eines jeden Jahres den dritten Theil meines jetzigen Gehaltes zu 4 p. C. verleihe und die jährlichen eingenommenen Zinsen sogleich wieder zu denselben p. C. unterbringe: so besitze ich nach zurückgelegten 50 Dienstjahren 15000 Thlr. Wie groß ist der Gehalt dieses jungen Mannes?

Bemerkte Druckfehler.

Seite	16	Zeile 18	v. u.	wenn man,	für	wenn
„	35	„ 10	„ „	Bruchpotenzen	„	Wurzelgrößen
„	48	Nr. 42)		$9a^5x^2$	„	$9a^5x$
„	53	Zeile 10	v. u.	$+6bcdh$	„	$-6bcdh$
„	54	Nr. 62)		$+7\sqrt{bc}$	„	$-7\sqrt{bc}$
„	55	„ 78)		$9b^2z$	„	$9b^2x$
„	55	„ 82)		$+25\sqrt[3]{b^2c^2}$	„	$-25\sqrt[3]{b^2c^2}$
„	56	„ 10)		$3\sqrt{ac}$	„	$5\sqrt{ac}$
„	58	„ 25)		$\frac{3m-2n}{m+n}$	„	$\frac{3m-2n}{m-n}$
„	66	„ 9)		594	„	54
„	66	„ 24)		56	„	55
„	72	„ 9)		8x	„	3x
„	130	Zeile 19	v. u.	mit einer und mehrern,	für	mehrern
„	239	„ 6	„ „	$=\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$	für	$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$
„	239	„ 7	„ „	6)	„	5).

[illegible]

[illegible]

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schubert, Johann Andreas

Mathematische Übungs-Aufgaben und deren Auflösungen, zum Gebrauche für Lehrer und Lernende

Bd.: 2,1

Dresden ; Leipzig 1833

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.49-a(1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739752-8